CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2 PSI

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Dans tout le problème, on note $\mathscr{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, O_n désigne la matrice nulle de $\mathscr{E}$ et I_n la matrice unité de $\mathscr{E}$.

Pour toute matrice A de $\mathscr{E}$, on note ${}^tA$ la matrice transposée de A.

Pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $E_{i,j}$ désigne la matrice de $\mathscr{E}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1.

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{E}$.

On dit qu'une matrice A de $\mathscr{E}$ est **nilpotente** lorsqu'il existe un entier naturel p tel que $A^p = O_n$. En particulier, la matrice nulle O_n est nilpotente.

On note $\mathscr{N}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{E}$ qui sont nilpotentes .

Questions de cours

1. Quelle est la dimension de $\mathscr{E}$? En donner sans justification une base.

2. Soient $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$. Calculer le produit des deux matrices $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$. (On montrera en particulier que ce produit est nul lorsque $j \neq k$)

3. Enoncer le Théorème de Cayley Hamilton.

4. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ soit trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Partie 1 : Propriétés élémentaires

$\boxed{\text{Soit } A \text{ une matrice de } \mathscr{N}}$

1. La matrice A peut-elle être inversible ? Justifier votre réponse.

2. On note $\mathrm{Sp}(A)$ le spectre de A, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres complexes de la matrice A.

Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$ et donner le polynôme caractéristique de la matrice A.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

4. Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ engendré par A, noté $\mathrm{Vect}(A)$ est inclus dans $\mathscr{N}$.

5. Vérifier que ${}^tA \in \mathscr{N}$.

6. Montrer que si M est semblable à A, alors $M \in \mathscr{N}$.

7. Montrer que $A^n = O_n$.

8. En déduire qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice M de $\mathscr{E}$ soit nilpotente est que : $M^n = O_n$.

On pourra admettre ce résultat et l'utiliser dans la suite du problème.

9. Montrer que A est trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Quel est le rang maximal de la matrice A ?

10. Soient B et C dans $\mathscr{E}$.

10.1 On suppose que $BC \in \mathscr{N}$. Prouver qu'alors $CB \in \mathscr{N}$.

10.2 Ici, on suppose de plus que l'on a : $\underline{B \in \mathscr{N}}$ et $\underline{AB = BA}$.

Montrer que $AB \in \mathscr{N}$ et que $A + B \in \mathscr{N}$.

11. Déterminer l'ensemble de toutes les matrices symétriques réelles appartenant à $\mathscr{N}$.

12. Dans cette question on suppose que la matrice nilpotente A est antisymétrique.

12.1 Prouver que $A^2 = O_n$.

12.2 En déduire l'ensemble de toutes les matrices antisymétriques appartenant à $\mathscr{N}$. (On pourra utiliser la trace)

Partie 2 : Exemples

Dans cette partie M est une matrice de $\mathscr{E}$.

1. Dans cette question, on prend $M = (m_{ij}) \in \mathscr{E}$ définie par : $\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \geqslant j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$, c'est-à-dire :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

1.1 Déterminer les éléments propres (valeurs propres et sous-espaces propres) de la matrice M.

1.2 On pose $S = M + {}^tM$. A-t-on $S \in \mathscr{N}$?

Montrer que $S^2 \in \mathrm{Vect}(I_n, S)$. Déterminer alors les éléments propres de la matrice S.

1.3 $\mathscr{N}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$?

2. Dans cette question on prend $n = 2$.

2.1 On suppose que M est de rang 1.

Montrer que $M^2 = \mathrm{tr}(M)\,M$. En déduire que M est diagonalisable ou nilpotente.

2.2 Déterminer une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont la diagonale n'est pas identiquement nulle.

2.3 En déduire l'ensemble de toutes les matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Partie 3 : Sous-espace engendré par $\mathscr{N}$

Soient :

• T_0 le sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ constitué des matrices de trace nulle

• V le sous-espace de $\mathscr{E}$ engendré par $\mathscr{N}$: $V = \mathrm{Vect}(\mathscr{N})$, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires (finies) d'éléments de $\mathscr{N}$.

1. Déterminer la dimension de T_0.

2. Prouver que $\mathscr{N}$ et V sont inclus dans T_0.

3. Pour tout $j \in [\![2,n]\!]$, on note :

• $F_j = E_{1,1} + E_{1,j} - E_{j,1} - E_{j,j}$

• $G_j = F_j - E_{1,j} + E_{j,1}$

3.1 Calculer F_j^2.

3.2 Montrer que $G_j \in V$.

3.3 Soit $\mathscr{F}$ la famille de matrices de $\mathscr{E}$ constituée de toutes les matrices $E_{i,j}$, $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ où $i \neq j$ et de toutes les matrices G_k pour $k \in [\![2,n]\!]$.

Montrer que la famille $\mathscr{F}$ est libre dans V.

3.4 En déduire que $V = T_0$.

Partie 4 : Sous-espaces de dimension maximale contenus dans $\mathscr{N}$

Soient $\mathcal{T}_1$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ constitué des matrices triangulaires supérieures dont la diagonale est composée uniquement de 0.

1. Déterminer la dimension de $\mathcal{T}_1$.

2. Montrer que toute matrice nilpotente est semblable à une matrice de $\mathcal{T}_1$.

On pourra utiliser des résultats de la partie **1**.

3. Démontrer que $\mathscr{E} = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{T}_1$.

4. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ contenu dans $\mathscr{N}$ dont la dimension est notée d.

4.1 On suppose que $d > \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Démontrer que l'on a : $\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) > 0$. Conclure.

4.2 Quelle est la dimension maximale d'un sous espace de $\mathscr{E}$ contenu dans $\mathscr{N}$?

Donner un exemple d'un tel sous espace.

Partie 5 : Un peu de topologie

$\mathscr{E}$ est muni de sa structure d'espace vectoriel normé de dimension finie.

1. Montrer que $\mathscr{N}$ est une partie fermée de $\mathscr{E}$.

2. Soient $A \in \mathscr{N}$, α un réel non nul et $M = I_n + \alpha A$.

Montrer que $\det(M) = 1$.

En déduire que toute boule ouverte de centre A contient au moins une matrice de rang n puis que l'intérieur de $\mathscr{N}$ est vide.

3. Soit F un sous-espace de $\mathscr{E}$. Montrer que si l'intérieur de F est non vide, alors $F = \mathscr{E}$.

Retrouver alors le résultat de la question précédente.

Partie 6 : Deux autres résultats

Soient $A \in \mathscr{N}$, α un réel non nul et $M = I_n + \alpha A$.

1. On sait que M est inversible. Calculer son inverse à l'aide des puissances de la matrice A. On pourra utiliser une suite géométrique.

2. Donner sans démonstration le développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1+x)^{1/2}$.

3. Montrer qu'il existe une matrice B de $\mathscr{E}$ telle que $B^2 = M$.

On exprimera la matrice B comme un polynôme de la matrice A.