CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2 MP

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Les différentes parties de ce problème ne sont pas indépendantes, mais tout résultat peut-être admis pour être utilisé par la suite.

Dans tous le problème, on note e^x l'exponentielle du nombre réel x et $\ln y$ le logarithme népérien du nombre réel strictement positif y.

Etant donnée une fonction f à valeurs réelles, on rappelle qu'un zéro de f est un élément u tel que $f(u) = 0$.

Partie I

1. Rappeler la définition d'une fonction convexe.
2. Justifier le fait que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. On citera précisément le théorème utilisé.
3. Soient a et b des nombres réels strictement positifs. Soit θ dans l'intervalle $]0,1[$. Démontrer l'inégalité :

$$a^{\theta}b^{(1-\theta)} \leq \theta a + (1-\theta)b.$$

Partie II

Soit x un nombre réel strictement positif. Soient u et v deux nombres réels tels que $0 < u < v$.

4. (a) Que vaut $\int_u^v t^{x-1}dt$?
   (b) Justifier que l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}dt$ converge absolument. Quelle est sa valeur ?
5. Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ converge absolument.
6. (a) Déterminer la limite lorsque t tend vers 0 de $t^{x/2}\ln t$.
   (b) Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 (\ln t)t^{x-1}e^{-t}dt$ converge absolument.
7. On suppose que $x \in [u, v]$.
   (a) Justifier que $|(\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}| \leq (\ln t)^2 t^{u-1}$, pour tout t dans $]0,1]$.
   (b) Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}dt$ converge absolument.
8. Soit F l'application définie par, pour x, un nombre réel strictement positif:

$$F(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$$

   Démontrer que F définit une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$. Expliciter sous forme d'intégrale sa dérivée et sa dérivée seconde. On citera explicitement le théorème utilisé.

Partie III

9. Soit x un nombre réel strictement positif. Déterminer la limite lorsque t tend vers $+\infty$ de $(\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t/2}$.
10. En déduire que :
   (a) l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge absolument.
   (b) l'intégrale $\int_1^{+\infty} (\ln t)t^{x-1}e^{-t}dt$ converge absolument.

(c) l'intégrale $\int_1^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt$ converge absolument.

11. Soit G l'application définie par, pour x nombre réel strictement positif:

$$G(x) = \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Démontrer que G définit une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. Expliciter sous forme d'intégrale sa derivée et sa derivée seconde.

Partie IV

On peut donc définir la fonction Γ de la variable réelle x strictement positive en posant :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Comme $\Gamma = F + G$, on sait que Γ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

12. En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité :

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

13. Calculer la valeur de $\Gamma(1)$.

14. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel n non nul.

15. Justifier que la fonction Γ' admet au moins un zéro situé dans l'intervalle $]1, 2[$. On citera explicitement le théorème utilisé.

16. Justifier que la fonction Γ est une fonction convexe sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

17. Justifier que la fonction Γ' admet un unique zéro, noté α, dans l'intervalle $]0, +\infty[$ et que la fonction Γ admet un minimum global en α.

18. Représenter le graphe de la fonction Γ sur $]0, +\infty[$.

Partie V

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction f, définie sur l'intervalle I et à valeurs dans l'intervalle $]0, +\infty[$, est dite $\ln$-*convexe* si

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \theta \in [0, 1],\ \ln\left(f(\theta x + (1-\theta)y)\right) \leq \theta \ln\left(f(x)\right) + (1-\theta) \ln\left(f(y)\right).$$

La fonction f est donc $\ln$-convexe si et seulement si la fonction $\ln(f)$ est convexe.

19. Soit c un nombre réel. Justifier le fait que la fonction $x \mapsto e^{cx}$ est $\ln$-convexe sur $\mathbb{R}$.

20. Soit f une fonction de l'intervalle I à valeurs dans l'intervalle $]0,+\infty[$ ln-convexe. Démontrer que f est convexe. La réciproque est-elle vraie? Si oui, on justifiera précisément sa réponse et si non, on donnera un contre-exemple.

21. Soit f une fonction de l'intervalle I à valeurs dans l'intervalle $]0,+\infty[$. On suppose que, pour tout nombre réel c strictement positif, la fonction g_c définie pour x dans I par $g_c(x) = e^{cx}f(x)$ est convexe.

    Soient x, y dans I, $x < y$, et θ dans $]0,1[$.

    (a) Justifier $f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta e^{c(1-\theta)(x-y)}f(x) + (1-\theta)e^{c\theta(y-x)}f(y)$.

    (b) Soit H la fonction définie pour c dans $\mathbb{R}^+$ par : $H(c) = \theta e^{c(1-\theta)(x-y)}f(x) + (1-\theta)e^{c\theta(y-x)}f(y)$.

    i. Déterminer la limite de $H(c)$ lorsque c tend vers $+\infty$.

    ii. On admet que la fonction H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et un calcul élémentaire qu'on ne demande pas de faire montre que sa fonction derivée H' s'annule en un unique nombre réel c_0 en changeant de signe, le nombre c_0 vérifiant la relation :

    $$e^{c_0(x-y)} = \frac{f(y)}{f(x)}.$$

    Démontrer que $H(c_0) = f(x)^\theta f(y)^{(1-\theta)}$.

    iii. Etablir le tableau de variations de H. Que représente le point c_0 pour la fonction H ?

    (c) Justifier que f est ln-convexe.

22. Soient c et θ des nombres réels strictement positifs. On note $\varphi_{c,\theta}$ la fonction de la variable réelle x définie pour x dans $]0,+\infty[$ par :

    $$\varphi_{c,\theta}(x) = \theta^{x-1}e^{-\theta}e^{cx}.$$

    Démontrer que $\varphi_{c,\theta}$ est convexe sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

23. En déduire que la fonction Γ est ln-convexe sur $]0,+\infty[$.

Partie VI

Soit g une fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $]0,+\infty[$ telle que :

- g est une fonction ln-convexe
- $\forall x \in]0,+\infty[,\ g(x+1) = xg(x)$,
- $g(1) = 1$.

On pose $G = \ln g$.

24. Exprimer $g(n)$ en fonction de l'entier naturel n, $n \geq 1$.

25. Soient x dans $]0,1[$ et n dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

(a) Justifier les inégalités :

$$G(n) - G(n-1) \leq \frac{G(x+n) - G(n)}{x} \leq G(n+1) - G(n) \cdot$$

(b) En déduire que

$$(n-1)^x (n-1)! \leq g(x+n) \leq n^x (n-1)! \cdot$$

Soit n dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et soit x dans $]0,1]$. On pose :

$$u_n(x) = \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)} \cdot$$

Soit x dans $]0,1[$.

26. Démontrer pour un entier $n > 2$:

$$\left(\frac{n-1}{x+n-1}\right) u_{n-1}(x) \leq g(x) \leq u_n(x) \cdot$$

27. On se propose de démontrer que la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$ converge vers $g(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
    (a) Soit α dans $]0, +\infty[$. Justifier que $(1+\alpha)^x - 1 \leq \alpha x$.
    (b) Etudier le sens de variation de la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$.
    (c) Conclure.

28. En déduire que $g = \Gamma$.