CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2 MP

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Les différentes parties du problème ne sont pas indépendantes. Mais tout résultat d'une partie peut être admis et utilisé dans les parties suivantes.

Pour tout nombre réel $R > 0$, on note $D(0, R)$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon R.

Etant donnés un entier naturel $n \geqslant 1$ et une fonction h de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert I, on note $h^{(n)}$ la dérivée n-ième de h sur I. Si besoin , on pourra noter $h^{(0)} = h$.

Dans tout le problème on note f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{e^z - 1}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Tournez la page S.V.P.

Partie I .

Soit $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul et possiblement infini tel que $a_0 = 1$. On se propose de démontrer qu'il existe un nombre réel R' tel que $0 < R' \leq R$ et $T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à R' telle que :

$$\forall z \in D(0, R'), \quad S(z)T(z) = 1.$$

Soit ρ un nombre réel tel que $0 < \rho < R$.

1. Rappeler la définition précise du rayon de convergence de la série entière S.
2. Justifier que la suite $(|a_n \rho^n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
3. En déduire qu'il existe un nombre réel $K > 0$ tel que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$|a_n| \leqslant (\frac{K}{\rho})^n.$$

On considère la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$b_0 = 1 \text{ et pour } n > 0, b_n = -(\sum_{j=1}^{n} a_j b_{n-j}).$$

4. Démontrer que pour tout entier naturel n,
$$|b_n| \leqslant (\frac{2K}{\rho})^n.$$
5. En déduire que la série
$$T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$
a un rayon de convergence > 0.
6. Soit R' le minimum des rayons de convergence des séries S et T. Expliciter les coefficients de la série produit $S(z)T(z)$, pour z dans $D(0, R')$.
7. Conclure.

Partie IIA.

Soit f la fonction définie sur la première page.

1. Justifier précisement que la fonction f, restreinte à $\mathbb{R}$, est continue en 0.
2. Soit z un nombre complexe. On pose $z = x + iy$, avec x et y réels. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de $e^z - 1$ en fonction de x et de y.
3. Déterminer l'ensemble des éléments z de $\mathbb{C}$ tels que $f(z) = 0$.
4. Justifier qu'il existe une fonction g définie sur le disque $D(0, 2\pi)$ définie par :

$$\forall z \in D(0, 2\pi), g(z) = \frac{1}{f(z)}.$$

5. (a) Rappeler le développement en série entière de la fonction exponentielle. Quel en est le rayon de convergence ?

   (b) En déduire que la fonction f admet un développement en série entière sur $\mathbb{C}$: on montrera qu'il existe une série entière $U(z)$ de rayon de convergence infini telle que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ U(z) = f(z).$$

   Expliciter les coefficients de la série entière U.

6. En utilisant les résultats de la partie I, justifier qu'il existe une série entière $V(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ et un nombre réel R dans $]0, 2\pi[$ telle que le rayon de convergence de $V(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ est supérieur ou égal à R et telle que

$$\forall z \in D(0, R),\ V(z) = g(z).$$

7. (a) Démontrer que la fonction G définie par

$$\forall t \in]-2\pi, 2\pi[,\ G(t) = t + 2g(t),$$

   est une fonction paire.

   (b) Que peut-on en déduire pour les coefficients de la série $V(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$?

Dans toute la suite du problème, on note $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres complexes définie par :

$$\forall z \in D(0, R)\ , g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n z^n.$$

On admet qu'on peut prendre $R = 2\pi$.

Tournez la page S.V.P.

Partie II B.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, γ_n est un nombre réel.
2. Expliciter $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.
3. Justifier les égalités :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\ ,\ \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_k}{(n-k+1)!} = 0.$$

4. Justifier que, pour tout entier naturel n, γ_n est un nombre rationnel.
5. Que peut-on dire de γ_n, lorsque n est un entier naturel impair ≥ 3 ?

Partie III.

Pour tout entier naturel n, on note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui envoie t sur $(1 - e^t)$.

1. Expliciter un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, centré en 0, tel que

$$\forall t \in I,\ |e^t - 1| < 1.$$

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels telle que la série entière $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est de rayon de convergence au moins 1.

On se propose de démontrer que la série de fonctions $S_h = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

2. Soit $t \in I$. Démontrer que la série $S_h(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n(t)$ est convergente.
3. (a) Soit K un segment non réduit à un point contenu dans I. Justifier qu'il existe un nombre réel > 0, qu'on note C_K, tel que

$$\forall t \in K, |e^t| \leqslant C_K.$$

   (b) En déduire que S_h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et que

$$\forall t \in I,\ S_h'(t) = -e^t \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} h^n(t).$$

   On citera précisément le théorème utilisé.

   (c) Justifier qu'il existe une série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ de rayon de convergence au moins 1 telle que

$$\forall t \in I,\ S_h'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n h^n(t).$$

4. Démontrer que S_h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I : On pourra démontrer par récurrence sur l'entier naturel $k \geq 1$ que S_h est de classe $\mathcal{C}^k$ et qu'il existe une série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)} z^n$ de rayon de convergence au moins 1 telle que que $(S_h)^{(k)}$, la dérivée k-ième de S_h, vérifie

$$\forall t \in I,\ (S_h)^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)} h^n(t).$$

Partie IV.

On conserve les notations de la partie III, en particulier la fonction h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = 1 - e^t$ et I est l'intervalle ouvert défini dans la question III1.

1. Démontrer que pour tout $t \in I$, $g(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1-e^t)^k}{k+1}$. On justifiera la convergence de cette série de fonctions.

2. (a) Enoncer précisément la formule de Leibniz.

   (b) Démontrer par récurrence sur l'entier naturel k que pour tout entier naturel n tel que $k > n$, $(h^k)^{(n)}(0) = 0$.

   (c) Démontrer que pour tous entiers naturels n, k tels que $k > n$, et pour tout H, fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I,
   $$(Hh^k)^{(n)}(0) = 0.$$

   (d) En déduire que
   $$g^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(h^k)^{(n)}(0)}{k+1}.$$
   On pourra décomposer $g(t)$, pour $t \in I$, sous la forme
   $g(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{h(t)^k}{k+1} + h(t)^{n+1} H(t)$, avec H fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

3. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, et tout entier naturel k non nul,
   $$(h^k)^{(n)}(0) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} j^n.$$

   (b) Quelle expression de γ_n peut-on en déduire, pour tout entier naturel n ?