e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercices

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne la matrice identité de taille (n,n) par I_n.

Soit $\mathbb{R}^n$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n muni du produit scalaire canonique :
Pour tous $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, ..., y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on a :

$$< \vec{x}, \vec{y} >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

On note $\vec{u} = (1, 1, ..., 1)$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont égales à 1 et F le sous-espace vectoriel formé par l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$.

1. Démontrer que F est l'ensemble des vecteurs $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

2. Quelle est la dimension de F ?

On considère A_n la matrice de taille (n,n) définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a des 0 comme coefficients diagonaux et des 1 partout ailleurs.

3. Enoncer précisément le théorème spectral. Que peut-on en conclure pour la matrice A_n ?

4. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ est dans F. Calculer $A_n X$ en fonction de X.

5. Déterminer les valeurs propres de A_n et, pour chacune de ses valeurs propres, le sous-espace propre associé.

6. Calculer le déterminant de la matrice A_n.

On considère B_n la matrice de taille $(2n, 2n)$ définie par blocs par :

$$B_n = \begin{pmatrix} A_n & I_n \\ I_n & A_n \end{pmatrix}.$$

7. La matrice B_n est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.

8. Soit α une valeur propre de la matrice B_n. Démontrer que α est une valeur propre de $(A_n + I_n)$ ou $(A_n - I_n)$.

9. En déduire que les valeurs propres de B_n sont dans l'ensemble $\{-2, 0, n-2, n\}$.

10. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de B_n.

Soit M une matrice de taille (n, n). On lui associe U_M, la matrice de taille $(2n, 2n)$ définie par

$$U_M = \begin{pmatrix} M & I_n \\ I_n & M \end{pmatrix}.$$

12. On suppose M diagonalisable. On note $\alpha_1, ..., \alpha_r$ les valeurs propres distinctes de M. Déterminer les valeurs propres de U_M en fonction de $\alpha_1, ..., \alpha_r$.

13. La matrice U_M est-elle diagonalisable ?

Exercice 2

On admet l'égalité $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On définit pour tout entier naturel non nul n, $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On introduit les séries entières :

$$H(x) = \sum_{n\geq 1} h_n\, x^n, \quad S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\, x^n \text{ et } T(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{h_n}{n}\, x^n.$$

On note I l'intervalle (ouvert) de convergence de la série H.

1. Soit n un entier naturel non nul. Justifier $h_{2n} - h_n \geq \dfrac{1}{2}$.

2. Démontrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série H. En déduire I.

4. Déterminer les rayons de convergence des séries S et T.

5. Quel est le développement en série entière de la fonction $(g : x \mapsto \ln(1-x))$? Préciser son rayon de convergence.

6. Justifier que la fonction $(G : x \mapsto \ln(1-x)/(1-x))$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$. Etablir une relation entre G et H.

Soit L la primitive de H sur l'intervalle I telle que $L(0) = 0$.

7. Exprimer L à l'aide de la fonction $(g : x \to \ln(1-x))$.

8. Justifier que L est développable en série entière et expliciter son développement en série entière. On énoncera précisément le théorème utilisé.

9. En déduire une relation entre $T - S$ et L.

10. Soit y dans $]0,1[$

    (a) Justifier que $\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\, du$ est une intégrale convergente et démontrer l'égalité :

    $$\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\, \mathrm{d}u + S(y) = 0$$

    On pourra utiliser le développement en série entière de la fonction $(x \mapsto \ln(1-x))$.

    (b) Justifier que $\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\, du$ est une intégrale convergente et démontrer l'égalité :

    $$\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\, \mathrm{d}u = -\frac{\pi^2}{6}$$

    (c) Justifier que

    $$\frac{\pi^2}{6} = S(y) + S(1-y) + \ln(y)\ln(1-y)$$

11. Exprimer la valeur de $T(\frac{1}{2})$ en fonction de π. Justifier votre réponse.

Exercice 3

On désigne par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls. Pour tous k, n dans $\mathbb{N}^*$, on note

$$S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k.$$

On pourra utiliser le fait que : $S_2(n) = n(n+1)(2n+1)/6$.

1. Soit k dans $\mathbb{N}^*$. Justifier que la suite $(\frac{1}{n^{k+1}} S_k(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{k+1}$.

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$, on note $\mathbf{E}(X)$ son espérance et $\mathbf{V}(X)$ sa variance. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2.

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, N]\!]$, Démontrer que

$$\mathbf{E}(X) \;=\; \sum_{i=1}^{N} P(X \geq i).$$

On dispose d'une boîte dans laquelle sont placés des jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à N. Soit k un entier naturel ≥ 2. On tire k fois de suite un jeton dans cette boîte. On note son numéro et on le remet dans la boîte. Les tirages sont indépendants les uns des autres. On note X_i la variable aléatoire qui prend comme valeur le numéro du jeton du i-ème tirage, pour i dans $[\![1, N]\!]$. On suppose que la loi de X_i est uniforme sur $[\![1, N]\!]$. On note U_k et V_k les variables aléatoires :

$$U_k = \min(X_1, ..., X_k) \;\text{ et }\; V_k = \max(X_1, ..., X_k).$$

3. Exprimer $\mathbf{E}(X_1)$, $\mathbf{E}(X_1^2)$ et $\mathbf{V}(X_1)$ en fonction de N.

4. On se propose de simuler en Python les variables V_k pour $N = 10$.

   (a) Ecrire une fonction `simulX` qui renvoie une liste de longueur 100 de réalisations des variables $X_1, ..., X_{100}$. On pourra utiliser la fonction : random.randint L'instruction random.randint(1,10) fournit un nombre entier aléatoire dans $[\![1, 10]\!]$ uniformément.

   (b) En déduire une fonction `REALIV` qui renvoie une liste de longueur 100 de réalisations des variables $V_1, ..., V_{100}$.

Tournez la page S.V.P.

5. Soit k dans $\mathbb{N}^*$ supérieur à 2.

   (a) Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Justifier que :

   $$P(U_k \geq i) = \left(\frac{N-i+1}{N}\right)^k.$$

   (b) On appelle plusieurs fois la fonction REALIV de la question 4b. On constate qu'à chaque fois, le résultat obtenu est une liste qui se termine par un grand nombre de 10. Justifier mathématiquement ce résultat.

   (c) Exprimer $\mathbf{E}(U_k)$ en fonction de N à l'aide de la fonction S_k introduite au début de l'exercice. Donner un équivalent de $\mathbf{E}(U_k)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

6. (a) On introduit les variables $Y_i = N + 1 - X_i$, pour i dans $[\![1, N]\!]$. Justifier que les variables $(Y_1, ..., Y_n)$ sont indépendantes et de même loi. Préciser cette loi.

   (b) En déduire $\mathbf{E}(V_k)$ et $\mathbf{V}(V_k)$ en fonction de $\mathbf{E}(U_k)$ et $\mathbf{V}(U_k)$.

7. On considère le couple de variables aléatoires (U_2, V_2).

   (a) Exprimer $U_2 + V_2$ et U_2V_2 en fonction de X_1 et X_2.

   (b) En déduire $\mathbf{V}(U_2 + V_2)$ et $\mathbf{E}(U_2V_2)$ en fonction de N.

   On peut déduire par un calcul la covariance de U_2 et V_2, notée $\mathbf{Cov}(U_2, V_2)$. On admet sa valeur :

   $$\mathbf{Cov}(U_2, V_2) = \frac{(N^2-1)^2}{36N^2}.$$

   (c) Exprimer $\mathbf{V}(U_2)$ et $\mathbf{V}(V_2)$ en fonction de N.

   (d) On note $\rho_2(N)$ le coefficient de corrélation de U_2 et V_2. Exprimer $\rho_2(N)$ en fonction de N.

   (e) Que peut on dire de la suite $(\rho_2(N))_{N\in\mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}}$ lorsque N tend vers $+\infty$?

8. (a) Si X est une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$, démontrer que $\mathbf{E}(X^2) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N}(2i-1)P(X \geq i)$.

   (b) Exprimer $\mathbf{E}(U_k^2)$ en fonction de N à l'aide des fonctions S_k et S_{k+1} introduites au début de l'exercice.

   (c) Exprimer $\mathbf{V}(U_k)$ en fonction de N à l'aide des fonctions S_k et S_{k+1} introduites au début de l'exercice.

   (d) Donner un équivalent de $\mathbf{V}(U_k)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 18 1141 – D'après documents fournis