e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

Les quatre exercices sont indépendants

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, on désigne par $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ n-1 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 2 & 0 & n-1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j}$ tous nuls exceptés ceux tels que :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \qquad a_{k+1,k} = n-k, \quad a_{k,k+1} = k.$$

$\boxed{1}$ **1.a)** On prend $n = 2$. A_2 est- elle diagonalisable ? A_2 est-elle inversible ?

1.b) On prend $n = 3$. A_3 est -elle diagonalisable? A_3 est- elle inversible?

$\boxed{2}$ Dans cette question seulement on prend $n = 4$. Soit $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ notée simplement A et soit le polynôme $Q(X) = (X^2 - 1)(X^2 - 9)$.

2.a) Calculer les matrices A^2 et $Q(A)$.

2.b) Justifier que A est diagonalisable.

2.c) Déterminer une matrice $\Delta \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, à coefficients entiers, inversible et telle que $\Delta^{-1} A \Delta = D$ soit une matrice diagonale notée $diag(a, b, c, d)$ avec $a > b > c > d$.

2.d) Montrer que $\Phi : M \mapsto \Delta M \Delta^{-1}$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et justifier que Φ est bijectif.

2.e) Montrer qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ commute avec D si et seulement si N est une matrice diagonale.

2.f) Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) / \quad AM = MA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et, en utilisant les questions précédentes, déterminer sa dimension.

2.g) Justifier que la famille (I_4, A, A^2, A^3) est une base de $\mathcal{C}_A$ (où $I_4 = diag(1, 1, 1, 1)$).

$\boxed{3}$ On note ici $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes réels de degré $\leqslant n-1$, et $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^{n-1})$ la base canonique de E.

Si $P(X) \in E, P'(X)$ désigne le polynôme dérivé de $P(X)$.

3.a) Justifier que l'application $\quad \varphi : P(X) \mapsto (n-1)XP(X) + (1 - X^2)P'(X) \quad$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E et calculer $\varphi(X^h)$ pour tout $h \in [\![0, n-1]\!]$.

3.b) Comparer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ et la matrice A_n définie en préliminaire.

3.c) Pour tout $h \in [\![0, n-1]\!]$, on définit le polynôme $P_h = (X-1)^h (X+1)^{n-1-h}$. Déterminer le réel λ_h tel que $\varphi(P_h) = \lambda_h P_h$. Que peut-on déduire de ce calcul ?

3.d) Justifier que la matrice A_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3.e) Préciser selon n dans quel cas A_n est inversible.

3.f) Montrer l'existence d'une matrice $U_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(U_n)^3 = A_n$.

Exercice 2

$\boxed{1}$ **1.a)** Rappeler la définition de la fonction Arctan, ainsi que son tableau de variation et sa dérivée. Justifier que pour tout réel x, on a : $|\operatorname{Arctan}(x)| \leqslant |x|$.

1.b) Étudier et représenter la fonction $g\ :\ ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\ \cup\ ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\ \cup\ ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[, \qquad g(x) = \operatorname{Arctan}(\tan(x)).$$

1.c) Pour $x > 0$, soit $\psi(x) = \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$. Calculer la dérivée $\psi'(x)$.

En déduire une relation entre $\operatorname{Arctan}(x)$ et $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$.

1.d) Déterminer le développement en série entière de la fonction Arctan sur $]-1, 1[$.

$\boxed{2}$ On considère la fonction h définie par $h(0) = 1$ et pour tout réel $x \neq 0$,

$$h(x) = \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x}.$$

2.a) Justifier que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a : $h(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)}$.

On traitera le cas $|x| < 1$ et on étendra le résultat au cas $|x| = 1$, en utilisant un argument à préciser sur la continuité sur $[-1, 1]$ de la somme de la série de fonctions.

2.b) Justifier que h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (*on raisonnera sur* $]-1, 1[$ *puis sur* $\mathbb{R}$.)

$\boxed{3}$ Soit $H(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t}\, dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

3.a) Montrer que H est bien définie et est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; préciser H'.

3.b) Trouver une relation entre $H(x)$ et $G(x) = H(\frac{1}{x})$ pour $x > 0$.
Pour cela, on pourra utiliser G'.

3.c) Soit $f(x) = \dfrac{H(x)}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.
Montrer que f est développable en série entière sur $[-1, 1]$, et f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3.d) Donner une relation entre $f(x)$ et $f(\frac{1}{x})$ pour $x > 0$.

$\boxed{4}$ Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(tx)}{t\,(t^2+1)}\, dt$.

4.a) Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

4.b) Montrer que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. *On précisera bien le théorème utilisé.*

4.c) Déterminer $\varphi'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ (avec une expression sans intégrale), si $x \neq 1$ puis $x = 1$. *Pour cela on pourra utiliser la relation :*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2}\right).$$

4.d) En déduire la valeur de $\varphi(x)$ pour tout réel x.

4.e) Si $x \in \mathbb{R}$, justifier l'existence et calculer $K(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Arctan}(x\tan(\theta))}{\tan(\theta)}\, d\theta$.

4.f) En déduire la valeur de $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(\theta))\, d\theta$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3

On considère l'espace vectoriel euclidien orienté $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, la base canonique $\mathcal{B}$ étant orthonormale et directe. On notera $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire tel que si $X, Y \in E$, $\quad \langle X, Y\rangle = {}^tXY$.

$\mathcal{L}(E)$ désigne l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

1 On considére les deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ définis par :

$$\mathcal{S}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) / \ \forall (X,Y) \in E^2, \quad \langle u(X), Y\rangle = \langle X, u(Y)\rangle\},$$
$$\mathcal{A}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) / \ \forall (X,Y) \in E^2, \quad \langle u(X), Y\rangle = -\langle X, u(Y)\rangle\}.$$

1.a) Justifier que $\mathcal{S}(E)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ (on l'admettra pour $\mathcal{A}(E)$) et montrer que $\mathcal{S}(E) \cap \mathcal{A}(E)$ est réduit à l'endomorphisme nul.

1.b) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M = Mat_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$, avec $u : X \mapsto MX$.

Montrer que :

$(i) \quad u \in \mathcal{S}(E) \Longleftrightarrow {}^tM = M, \qquad\qquad (ii) \quad u \in \mathcal{A}(E) \Longleftrightarrow {}^tM = -M.$

1.c) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. On lui associe $\hat{u} \in \mathcal{L}(E)$ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(\hat{u}) = {}^tM$.

Montrer que $(u + \hat{u}) \in \mathcal{S}(E)$ et que $(u - \hat{u}) \in \mathcal{A}(E)$

1.d) Conclure que $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{A}(E)$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{L}(E)$.

2 **2.a)** Soit $\sigma \in \mathcal{S}(E)$. Justifier l'existence de (e_1, e_2, e_3) base orthonormale de E et de trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que :

$$\forall\ V \in E, \quad \sigma(V) = \lambda_1\langle e_1, V\rangle e_1 + \lambda_2\langle e_2, V\rangle e_2 + \lambda_3\langle e_3, V\rangle e_3.$$

2.b) Préciser dans quel cas σ est une projection orthogonale, ou alors une symétrie orthogonale.

2.c) Exemple 1. Soit σ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer (e_1, e_2, e_3) base orthonormale de E et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ pour σ comme en **2.a)**.

3 Soit $\alpha \in \mathcal{A}(E)$ non nul.

3.a) Montrer que $Ker(\alpha)$ et $Im(\alpha)$ sont orthogonaux, puis que $E = Ker(\alpha) \oplus Im(\alpha)$.

3.b) Montrer que $Im(\alpha)$ est stable par α et que l'endomorphisme $\tilde{\alpha}$ induit par α sur $Im(\alpha)$ ne peut pas avoir de valeur propre (réelle). En déduire que α est de rang 2.

3.c) Justifier l'existence de (e_1, e_2, e_3) base orthonormale directe de E et d'un réel $k \neq 0$ tels que : $\qquad \forall\ V \in E, \quad \alpha(V) = k\left(\langle e_1, V\rangle e_2 - \langle e_2, V\rangle e_1\right).$

3.d) Exemple 2. Soit α tel que $Mat_{\mathcal{B}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Déterminer (e_1, e_2, e_3) base orthonormale directe de E et $k \neq 0$ associés à α (cf. **3.c)**).

4 Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et la rotation $r \in SO(E)$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère aussi $\hat{r}$ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(\hat{r}) = {}^t\left(Mat_{\mathcal{B}}(r)\right)$.

Donner la décomposition de $\sigma = \dfrac{r + \hat{r}}{2}$ comme en **2.a)**, ainsi que de $\alpha = \dfrac{r - \hat{r}}{2}$ comme en **3.c)** lorsque $\alpha \neq 0$.

Exercice 4

On s'intéresse aux nombres de **Fibonacci** définis par récurrence par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et:
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

$\boxed{1}$ **1.a)** Écrire en langage Python une fonction "$fib(n)$" permettant le calcul de F_n.

1.b) On peut démontrer et on l'admettra, que ces nombres vérifient les relations suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$F_n = 2F_{\frac{n}{2}-1}F_{\frac{n}{2}} + (F_{\frac{n}{2}})^2$ si n est pair, $\qquad F_n = (F_{\frac{n-1}{2}+1})^2 + (F_{\frac{n-1}{2}})^2$ si n est impair.

Vérifier cette propriété en calculant ainsi F_6.

Compléter l'écriture de la fonction "$fibb(n)$" ci-dessous permettant de calculer F_n, on commencera au dernier "else" sur la copie en rajoutant les instructions manquantes.

```
def fibb(n):
    if n <= 1:
            return n
    else :
            if n%2 == 0:
                a = fibb(n//2)
                b = fibb(n//2 - 1)
                return a * (2 * b + a)
            else : ...
```

$\boxed{2}$ **2.a)** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer les coefficients de A^n au moyen des nombres de Fibonacci F_{n+1}, F_n et F_{n-1}.

2.b) Écrire en langage Python une fonction "$fibbb(n)$" permettant le calcul de F_n en utilisant le calcul de A^n (dont le calcul doit intervenir dans le programme).

2.c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\quad F_{n+1}F_{n-1} - (F_n)^2 = (-1)^n$.

$\boxed{3}$ **3.a)** Montrer la convergence de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{F_{n+1}F_n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et exprimer $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{F_{n+1}F_n}$ au moyen de $L = \displaystyle\lim_{p \to +\infty} \frac{F_p}{F_{p+1}}$ (dont l'existence résulte de la convergence de la série).

3.b) Grâce à une propriété concernant les séries alternées et que l'on rappellera, étant donné $\varepsilon > 0$, écrire un algorithme (en français ou alors en langage Python) permettant de calculer une valeur approchée de L au moyen d'une somme partielle de cette série, avec une précision inférieure à ε.

$\boxed{4}$ On note $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. On peut montrer et on l'admettra, que l'on a:
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \varphi^n\right)$$

4.a) Calculer L de **3.a)** au moyen de Φ.

4.b) Pour tout $x \in]\varphi, -\varphi[$, montrer la convergence de la série ainsi que l'égalité :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}.$$