e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 MP

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercices

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

Pour tout entier naturel n dans $\mathbb{N}^*$, on note

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad f_n = h_n - \ln(n).$$

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_1 = 1 \text{ et pour } n \geq 2, u_n = \frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n}) \; ; \; v_n = \frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n}).$$

1. Rappeler le domaine de définition de la fonction $(x \mapsto x + \ln(1-x))$. Préciser son développement de Taylor à l'ordre 2 en 0.
2. Soit n un entier naturel non nul. Quel est le signe de u_n ?
3. Justifier que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.
4. Etudier la fonction $(f : x \mapsto x - \ln(1+x))$ sur $[0,1]$.
5. Justifier que la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ est convergente.
6. Soit n un entier naturel non nul. Exprimer en fonction de n, $v_n - u_n$.
   En déduire une expression de $\sum_{n=1}^{N}(v_n - u_n)$ en fonction de N pour tout entier naturel N supérieur ou égal à 3.
7. Que peut-on dire des suites $(\sum_{n=1}^{N} v_n)_{N\in\mathbb{N}^*}$ et $(\sum_{n=1}^{N} u_n)_{N\in\mathbb{N}^*}$? Justifier que $\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} v_n$.

Dans la suite de l'exercice, on note γ la somme des séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} v_n$.

8. Démontrer que γ est dans l'intervalle $]0,1[$.
9. Soit n un entier naturel non nul. Justifier que :
   $$\ln(n+1) \leq h_n \leq 1 + \ln(n)$$
10. Justifier que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
11. Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et de limite γ.
    Indication : Exprimer les sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ en fonction des termes de la suite (f_n).

12. Soit r un entier naturel > 1.

   (a) Dessiner le graphe de la fonction $(x \mapsto (1/x^r))$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   (b) Soit a un nombre réel > 0. Exprimer en fonction de a et r :

$$I(a) = \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^r}$$

   (c) Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers 0 et telle que la suite $(n^r(w_{n+1} - w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite ℓ telle que $\ell > 0$.

      i. Soient a, b dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que $0 < a < \ell < b$. Justifier l'existence d'un entier naturel N supérieur ou égal à 2 tel que pour tout entier naturel $n \geq N$, on ait les inégalités :

$$a \leq n^r(w_{n+1} - w_n)) \leq b.$$

      ii. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N :

$$a \int_N^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^r} \leq w_{n+1} - w_N \leq b \int_{N-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^r}.$$

      iii. En déduire l'encadrement :

$$-bI(N-1) \leq w_N \leq -aI(N)$$

      où I a été défini dans la question 12(b).

      iv. Démontrer que la suite $(n^{r-1}w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et expliciter en fonction de ℓ et r sa limite.

      v. Ce résultat reste-t-il vrai si la limite ℓ de la suite $(n^r(w_{n+1} - w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est 0 ?

13. Démontrer qu'il existe un nombre réel α qu'on explicitera tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$$

   Indication : On appliquera les résultats de la question 12 à une suite bien choisie.

Exercice 2

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1. On note E l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique $< \ , \ >$:

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad < \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

On note $\| \ \|$ la norme associée et $e_1, ..., e_n$ la base canonique de E.

1. Soit M une matrice dans $M_n(\mathbb{R})$. On note $v_1, ..., v_n$ ses vecteurs colonnes.
   (a) Exprimer en fonction des vecteurs $v_1, ..., v_n$ les coefficients de la matrice ${}^tMM$.
   (b) Dans le cas particulier où les vecteurs $v_1, ..., v_n$ sont orthogonaux deux à deux, démontrer que
   $$|\det(M)| = \| v_1 \| \, \| v_2 \| \cdots \| v_n \| .$$
2. Déterminer les matrices dans $M_n(\mathbb{R})$ qui sont diagonales et orthogonales.

On note $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des matrices M dans $M_n(\mathbb{R})$ telles que :
— Tous les coefficients de M sont dans $\{-1, 1\}$.
— Les vecteurs colonnes de la matrice M sont orthogonaux 2 à 2.
Par exemple, on pourra constater que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2 \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_4$$

3. Ecrire une fonction en Python qui lorsqu'elle prend en entrée la liste des colonnes d'une matrice M, de taille n, renvoie 1 si la matrice est dans $\mathcal{H}_n$ et 0 sinon.
4. Soit $M \in \mathcal{H}_n$.
   (a) Quelle est la norme d'un vecteur colonne de M ?
   (b) Que vaut $|\det(M)|$?
5. Soit $M \in \mathcal{H}_n$. On suppose que le premier vecteur colonne de M est le vecteur
   $$v_1 = \sum_{i=1}^{n} e_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   Soit, pour i dans $[\![2, n]\!]$, $v_i = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{j,i} e_j$, le i-ème vecteur colonne de M. Démontrer que le nombre de $m_{j,i}$ égaux à 1 est égal au nombre de $m_{j,i}$ égaux à -1.

6. On suppose que $\mathcal{H}_n$ est non vide. Démontrer que $\mathcal{H}_n$ contient une matrice M_0 dont la première colonne est le vecteur $v_1 = \sum_{i=1}^{n} e_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.
7. Lorsque $\mathcal{H}_n$ est non vide, que peut-on en dire de la parité de n ?
8. On suppose $n > 2$ et $\mathcal{H}_n$ non vide. Soit M_0 une matrice dans $\mathcal{H}_n$ dont la première colonne est le vecteur $v_1 = \sum_{i=1}^{n} e_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer que $\det(M_0)$ est un entier relatif multiple de 2^{n-1}.
   (b) Démontrer que n est un entier naturel multiple de 4.

Exercice 3

Soient a et b des entiers naturels tels que $a \leq b$. On rappelle que $[\![a, b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels k tels que $a \leq k \leq b$.

Si S est un ensemble fini, on note $|S|$ son cardinal.

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$, on note $\mathbf{E}(X)$ son espérance.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit ℓ un entier naturel non nul. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur l'ensemble $[\![1, \ell]\!]$.

On note U_n le nombre de valeurs distinctes prises par les variables $X_1, \ldots, X_n$: Si $k_1, ..., k_n$ sont les valeurs prises respectivement par les variables $X_1, \ldots, X_n$, alors U_n prend la valeur $|S|$ où $S = \{k_1, ..., k_n\}$, pour tout $(k_1, ..., k_n)$ dans $[\![1, \ell]\!]^n$.

Si S est une partie de $[\![1, \ell]\!]$, on note « $\{X_1, ..., X_n\} = S$ » la réunion des événements « $(X_1, ..., X_n) = (k_1, \ldots, k_n)$ » , pour tout $(k_1, ..., k_n)$ dans $[\![1, \ell]\!]^n$ tels que $S = \{k_1, ..., k_n\}$.

1. On suppose dans cette question seulement $n = 2$ et $\ell \geq 2$.
   (a) Justifier que U_2 ne prend que les valeurs 1 et 2.

(b) Calculer $P(U_2 = 1)$ et $P(U_2 = 2)$.

(c) Calculer $\mathbf{E}(U_2)$.

2. On se propose de simuler en Python la variable aléatoire U_n pour $n = 10$ dans le cas où $\ell = 25$.

   (a) Ecrire une fonction `simulU` qui renvoie une réalisation de U_{10}.
   On pourra utiliser la fonction : random.randint
   L'instruction random.randint(1,25) fournit un nombre entier aléatoire dans $[\![1, 25]\!]$ uniformément.

   (b) Ecrire une fonction `espU` qui renvoie une approximation de l'espérance de U_{10}. Quel théorème utilisez-vous pour justifier que le résultat de cette fonction est une approximation de l'espérance de U_{10} ? Enoncez précisément ce théorème.

3. Quel est l'ensemble des valeurs prises par U_n ?

4. Soit i dans $[\![1, n]\!]$. Soit S une partie de $[\![1, \ell]\!]$. Quelle est la probabilité de l'événement « $X_i \in S$ » en fonction de $|S|$?

5. Soit a dans $[\![1, \ell]\!]$. Exprimer $P(X_1 \neq a, \ \dots \ , X_{n-1} \neq a)$, la probabilité qu'aucune des variables $X_1, \dots, X_{n-1}$ ne prenne la valeur a, en fonction de n et ℓ.

6. En déduire $P(X_1 \neq X_n, \ \dots \ , X_{n-1} \neq X_n)$, la probabilité que la valeur prise par X_n soit différente de toutes les valeurs prises par les autres variables, en fonction de n et ℓ.

7. Justifier

$$P(X_1 \neq X_n \, , \ \dots \ , \ X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} P(\{X_1, ..., X_{n-1}\} = S) \left(\frac{\ell - |S|}{\ell} \right).$$

   où $\mathcal{P}_\ell$ désigne l'ensemble des parties non vides de $[\![1, \ell]\!]$.

8. En déduire dans le cas où $n \geq 3$:

$$\mathbf{E}(U_{n-1}) = \ell(1 - P(X_1 \neq X_n \, , \ \dots \ , \ X_{n-1} \neq X_n))$$

9. Exprimer $\mathbf{E}(U_n)$ en fonction de n et ℓ.

10. Déterminer la limite de $\mathbf{E}(U_n)$ lorsque ℓ est fixé et n tend vers $+\infty$. Interprétez votre résultat.

11. Déterminer la limite de $\mathbf{E}(U_n)$ lorsque n est fixé et ℓ tend vers $+\infty$. Interprétez votre résultat.

12. On s'intéresse aux possibles partages de dates d'anniversaire dans un groupe de n personnes. On suppose que les années sont toutes de 365 jours et que les dates d'anniversaire sont uniformément réparties sur chaque jour de l'année. On fait aussi l'hypothèse que les dates d'anniversaire de n personnes choisies au hasard sont indépendantes mutuellement.

    Soit D_n le nombre de dates d'anniversaire d'un groupe de n personnes choisies au hasard.

    (a) Exprimer en fonction de n le nombre moyen de dates d'anniversaire d'un groupe de n personnes, c'est-à-dire $\mathbf{E}(D_n)$.

    (b) Quelle est la limite de ce nombre moyen lorsque n tend vers $+\infty$?

IMPRIMERIE NATIONALE – 18 1136 – D'après documents fournis