CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 MP

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Exercice n°1

On appelle A la matrice carrée d'ordre $n > 0$ ayant des 2 sur la diagonale et des 1 ailleurs, c'est-à-dire :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Soit J la matrice carrée d'ordre $n > 0$ dont le terme général est égal à 1, c'est à dire :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Exprimer la matrice J^2 en fonction de la matrice J.

(b) En déduire un polynôme annulateur du second degré de la matrice A.

(c) Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.

2. (a) Montrer qu'il existe une matrice Q appartenant au groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que :
$$A = QDQ^{-1}.$$

(b) Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de la matrice A, en déduire la matrice D.

3. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices U carrées d'ordre $n > 0$ à coefficients réels vérifiant la relation :
$$^tUA = AU$$

(a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n > 0$ à coefficients réels.

(b) Pour toute matrice U de l'ensemble $\mathcal{E}$, on pose $V = {}^tQUQ$ où la matrice Q est la matrice de la question 2)a). Montrer que :
$$^tVD = DV$$
où D désigne la matrice diagonale de la question 2).

(c) Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des matrices V carrées d'ordre $n > 0$ à coefficients réels vérifiant la relation :
$$^tVD = DV$$
On admet que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n > 0$ à coefficients réels, montrer que : $\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{F}$.

(d) En déduire la dimension de l'espace $\mathcal{E}$.

4. On appelle φ l'application de $(\mathbb{R}^n)^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(x, y) = {}^tXAY$ où X et Y désignent les matrices colonnes formées par les coordonnées des vecteurs x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

(a) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

(b) A chaque matrice U de l'espace $\mathcal{E}$, on associe l'application linéaire u de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même telle que la matrice de u dans la base canonique soit la matrice U.
Montrer que l'application linéaire u est symétrique pour le produit scalaire φ.

(c) En déduire que pour toute matrice U de l'espace $\mathcal{E}$, il existe une matrice B appartenant à $GL_n(\mathbb{R})$ et une matrice Δ diagonale appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant
$$\begin{cases} U = B\Delta B^{-1} \\ {}^tBAB = I_n \end{cases}$$

Tournez la page S.V.P.

Exercice n°2

A toute suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de réels et à toute suite de réels non nuls $(b_n)_{n\geqslant 1}$ on associe la matrice A_n

de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où n est un entier strictement positif.

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

On note $P_n(X)$ son polynôme caractéristique qui est égal à $\det(XI_n - A_n)$.

1. Déterminer une relation de récurrence entre les polynômes $P_{n+1}(X), P_n(X)$ et $P_{n-1}(X)$.

2. (a) Justifier que la matrice A_n est diagonalisable.
   (b) Soit λ une valeur propre réelle de la matrice A_n, calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} -b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda - a_2 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ -b_2 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -b_{n-2} & 0 \\ & \cdots & -b_{n-2} & \lambda - a_{n-1} & -b_{n-1} \end{pmatrix}$$

   extraite de la matrice $\lambda I_n - A_n$ en supprimant sa première colonne et sa dernière ligne.
   (c) En déduire le rang de la matrice $\lambda I_n - A_n$ pour λ valeur propre de la matrice A_n.
   (d) En déduire que le polynôme caractéristique $P_n(X)$ de la matrice A_n admet n racines distinctes.

3. On appelle $\Delta_n(x)$ le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} P'_{n+1}(x) & P'_n(x) \\ P_{n+1}(x) & P_n(x) \end{pmatrix}$ où $P'_{n+1}(x)$ et $P'_n(x)$ désignent respectivement les fonctions polynômes dérivées des fonctions polynômes $P_{n+1}(x)$ et $P_n(x)$.

   (a) Soit $n \geqslant 2$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\quad \Delta_n(x) = P_n^2(x) + b_n^2 \Delta_{n-1}(x)$.
   (b) Montrer que $\Delta_1(x)$ est strictement positif pour tout x réel. En déduire le signe de $\Delta_n(x)$ pour tout $n \geqslant 2$.

4. Montrer que l'application $x \mapsto P_{n+1}(x)$ s'annule entre deux zéros consécutifs de P_n.
   (On pourra considérer l'application $x \mapsto \dfrac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}$)

Exercice n°3

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ existe. On admet alors que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

2. (a) Montrer que pour tout α strictement positif et pour tout x réel, l'application $t \mapsto \dfrac{1 - \cos \alpha t}{t^2} e^{-itx}$ est prolongeable par continuité en 0.

   (b) Montrer que : $\forall \alpha > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \dfrac{1 - \cos \alpha t}{t^2} e^{-itx}$ ainsi prolongée est intégrable sur $\mathbb{R}$.

3. On note, $\forall \alpha > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha t}{t^2} e^{-itx} dt.$$

   (a) Montrer que I est réelle.

   (b) Soit $A > 0$ et $B > 0$. On admet l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{\cos Bx}{x^2} dx$.

   Montrer que :

$$\int_A^{+\infty} \frac{\cos Bx}{x^2} dx = \frac{\cos AB}{A} - B \int_{AB}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

   (c) En déduire le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos Bx}{x^2} dx$ pour $B > 0$ puis pour B quelconque.

   (d) En déduire le calcul de l'intégrale I .

Tournez la page S.V.P.

Exercice 4

Des bits d'information, c'est-à-dire des 1 ou 0, sont transmis par l'intermédiaire d'un canal. Ce canal n'est pas complètement fiable. On observe qu'un bit envoyé, un 1 ou un 0, peut être altéré en sortie, c'est-à-dire qu'un 1 (respectivement un 0) en entrée du canal peut devenir un 0 (respectivement un 1) en sortie.

On note b le bit envoyé et b' le bit en sortie ($b \in \{0,1\}$ et $b' \in \{0,1\}$).

$$b \;\to\; \boxed{\text{canal bruité}} \;\to\; b'$$

Après observation, on modélise la transmission d'un bit de façon probabiliste :

- Le bit envoyé définit une variable aléatoire b : On note α la probabilité qu'un 1 soit envoyé, (c'est-à-dire $\alpha = P(b=1)$) et donc $1-\alpha$ la probabilité qu'un 0 soit envoyé.
- La perturbation dans le canal est aussi modélisée de façon probabiliste :
  - On désigne par p la probabilité qu'un 1 en entrée ne soit pas altéré pendant la transmission (c'est-à-dire $p = P(b' = 1 | b = 1)$) et donc $1-p$ désigne la probabilité qu'un 1 en entrée devienne un 0 en sortie.
  - On désigne par q la probabilité qu'un 0 en entrée ne soit pas altéré pendant la transmission, et donc $1-q$ désigne la probabilité qu'un 0 en entrée devienne un 1 en sortie.

1. On a écrit ci-dessus $p = P(b' = 1 | b = 1)$. Exprimer de la même manière $1-p, q$ et $1-q$ en terme de probabilités conditionnelles.
2. Un bit est envoyé. Quelle est la probabilité de recevoir un 1 en sortie ?
3. On reçoit le bit 1. Quelle est alors la probabilité qu'un 1 ait été envoyé en entrée ?

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On décide d'envoyer n fois le même bit b. On note $b'_1, ..., b'_n$ les n bits obtenus en sortie et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de 1 en sortie. On remarque que les valeurs possiblement prises par X sont $0, 1, ..., n$.

$$b \;\to\; \left\{ \begin{array}{lcl} \boxed{\text{canal bruité}} & \to & b'_1 \\ \boxed{\text{canal bruité}} & \to & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boxed{\text{canal bruité}} & \to & b'_n \end{array} \right.$$

4. Soit k un entier entre 0 et n. Exprimer $P(X = k)$ en fonction des paramètres p, q, α.
5. En déduire l'espérance de X en fonction des paramètres p, q, α.
6. Soit k un entier entre 0 et n. Exprimer la probabilité que le bit 1 ait été envoyé sachant que le nombre de 1 en sortie vaut k.

Le canal est désormais supposé symétrique, c'est-à-dire que chaque bit, que ce soit un 0 ou un 1, peut-être altéré avec la même probabilité $(1-p)$. On suppose $\frac{1}{2} < p < 1$.

7. (a) Déterminer en fonction des paramètres p et α, l'ensemble des valeurs k prises par X pour lesquelles il est plus probable (au sens strict) qu'un 1 ait été envoyé plutôt qu'un 0 ?

   (b) Que devient ce résultat lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$?

8. On suppose $\alpha = \frac{1}{2}$. On note $f(n)$ la probabilité que l'interprétation de l'observation en sortie soit fausse, c'est-à-dire que le bit en entrée n'est pas celui le plus probable en sortie.

   (a) Exprimer $f(n)$ en fonction des $P(X = k)$, pour des entiers k entre 0 et n.

   (b) Donner une expression de $f(n)$ en fonction de n et p.

   (c) Ecrire une fonction `binome` en langage Python qui prend en entrée un entier naturel N et un entier naturel k compris entre 0 et N et retourne la valeur du coefficient binomial $\binom{N}{k}$.

   (d) On suppose $p = 0.95$. Ecrire un programme en langage Python qui prend en entrée l'entier naturel n et donne une estimation de $f(n)$.