SESSION 2019

CONCOURS G2E

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites pour cette épreuve.
L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.
Si, au cours de l'épreuve, le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.
Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.
Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas.
Les deux problèmes sont indépendants.

PROBLÈME 1

Dans tout le problème, σ désigne un réel strictement positif.

La partie A est consacrée à l'étude de trois fonctions, l'une d'entre elles étant une densité de probabilité. Cette dernière est une densité d'une variable aléatoire réelle construite dans la partie B en utilisant deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi normale. On démontre dans la partie C que cette variable aléatoire réelle admet des moments de tous ordres. Après avoir donné une expression de ces moments, et à l'aide de deux autres suites, on obtient dans la partie D un équivalent du coefficient binomial $\binom{2p}{p}$ lorsque p tend vers $+\infty$.

Les parties A, B, C et D sont largement indépendantes bien que la partie D utilise certains résultats (donnés dans l'énoncé) de la partie C.

Partie A : Étude de trois fonctions

On considère les trois fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ par :

$$f_\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{x}{\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}, \qquad g(x) = x\mathrm{e}^{-x}, \qquad h(x) = \frac{2}{\mathrm{e}\,x}.$$

$\mathscr{C}_\sigma$ désigne la courbe représentative de f_σ et $\mathscr{H}$ la courbe représentative de h.

1. Démontrer que f_σ est une fonction de densité.
2. (a) Démontrer que g admet un maximum que l'on déterminera.
   (b) En déduire que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_\sigma(x) \leqslant h(x).$$

(c) Étudier le cas d'égalité dans l'inégalité précédente puis montrer que pour tout $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$, les courbes $\mathscr{C}_\sigma$ et $\mathscr{H}$ ont une tangente commune dont on donnera une équation cartésienne.

Partie B : Une nouvelle loi

1. Soit N_1 une variable aléatoire réelle suivant la loi normale de paramètres 0 et σ^2. On note M la variable aléatoire réelle définie par :
$$M = N_1^2.$$
   (a) En notant F_{N_1} la fonction de répartition de N_1, démontrer que M est une variable aléatoire réelle à densité dont la fonction de répartition est définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ F_{N_1}(\sqrt{x}) - F_{N_1}(-\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$
   (b) En déduire une densité de M.
2. À l'aide du changement de variable $t = \frac{\lambda}{2}(1 + \sin\theta)$ (et en vérifiant avec soin les hypothèses du théorème utilisé) démontrer que :
$$\forall \lambda > 0, \quad \int_0^\lambda \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(\lambda - t)}} = \pi.$$
3. Soit N_2 une variable aléatoire réelle de même loi que N_1 et indépendante de cette dernière. On note S et Z les variables aléatoires réelles définies par :
$$S = M + N_2^2 \ \text{ et } \ Z = \sqrt{S}.$$
   On rappelle qu'une densité de la somme de deux variables aléatoires réelles indépendantes, chacune ayant pour densité f_X et f_Y est donnée par le produit de convolution :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x - t)\,\mathrm{d}t.$$
   (a) Démontrer que S est une variable aléatoire réelle à densité dont une densité est donnée par la fonction :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2\sigma^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$
   (b) En déduire que Z est une variable aléatoire à densité dont une densité est f_σ (*cf.* partie A).

Partie C : Suite des moments

On considère dorénavant que $\sigma = 1$. Soit Z une variable aléatoire réelle dont f_1 est une densité. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note u_k le nombre réel (s'il existe) :
$$u_k = \mathbf{E}(Z^k).$$

1. (a) Démontrer que $u_0 = 1$ puis, à l'aide d'intégrations par parties, que $u_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $u_2 = 2$.
   (b) En déduire que Z admet une espérance et une variance que l'on calculera.
2. (a) Démontrer que u_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$ en établissant la relation ci-dessous :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_{k+1} = (k + 1)u_{k-1}.$$

(b) En déduire que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad u_{2p} = 2^p\, p! \;\text{ et }\; u_{2p+1} = \frac{(2p+1)!}{2^p\, p!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

(c) En déduire enfin que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k\, u_{k+1} = (k+1)!\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Partie D : Étude de deux autres suites et calculs d'équivalents

On considère enfin les suites définies par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad v_k = \frac{k!}{u_k^2} \;\text{ et }\; w_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Donner un équivalent simple de $v_k\, v_{k+1}$ lorsque k tend vers $+\infty$.
2. (a) Établir une relation de récurrence liant, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, v_{k+1} et v_{k-1}.
   (b) Calculer w_0, w_1 puis démontrer que la suite w vérifie la même relation de récurrence que v.
   (c) En déduire que les suites v et w sont égales.
3. (a) Démontrer que la suite w est décroissante.
   (b) En déduire que :
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{k}{k+1} \leqslant \frac{v_{k+1}}{v_k} \leqslant 1.$$
   (c) En déduire également que $v_{k+1} \underset{k\to+\infty}{\sim} v_k$ puis établir que :
   $$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \binom{2p}{p} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{4^p}{\sqrt{p\pi}}.$$

PROBLÈME 2

Dans tout le problème n désigne un entier naturel.

Dans la partie A du problème, on s'intéresse à quelques propriétés d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On en cherche en particulier deux bases et on écrit la matrice de passage de l'une vers l'autre. Ces matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont utilisées dans la partie B pour construire «par blocs» une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont on calcule les puissances n-ièmes et dont on détermine la diagonalisabilité. Enfin, dans la partie C, on utilise une telle matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ pour étudier le déplacement d'un soldat dans un fort et en donner une interprétation géométrique.

Les parties A et B sont largement indépendantes mais la partie C utilise un résultat de la partie B.

Partie A : Un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On se place dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on considère l'ensemble de matrices défini par :

$$\mathcal{E} = \left\{ M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. (a) Justifier que toute matrice appartenant à $\mathcal{E}$ est diagonalisable.
   (b) Démontrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (c) Démontrer enfin que toutes les matrices de $\mathcal{E}$ commutent entre elles.
2. Soient les quatre matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

   (a) Vérifier que $\mathcal{B} = (I, J)$ est une base de $\mathcal{E}$. Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?
   (b) Quelles sont les coordonnées de $M_{a,b}$ dans cette base $\mathcal{B}$?
3. (a) Démontrer que $\mathcal{B}' = (U, V)$ est également une base de $\mathcal{E}$ et déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
   (b) Calculer U^n et V^n (pour $n \neq 0$) et le produit UV.
   (c) Déterminer enfin les coordonnées de $M_{a,b}^n$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Partie B : Une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par quatre «blocs» qui sont des matrices de $\mathcal{E}$ (*cf.* partie A) :

$$A = \begin{pmatrix} M_{c,0} & M_{a,b} \\ M_{0,0} & M_{d,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

1. On suppose que $c = d$.
   (a) Quel est le spectre de A ?
   (b) Déterminer à quelle condition nécessaire et suffisante, A est diagonalisable.
2. On suppose que $c \neq d$.
   (a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} M_{c^n,0} & \frac{d^n - c^n}{d - c} M_{a,b} \\ M_{0,0} & M_{d^n,0} \end{pmatrix}.$$

   (b) Déterminer les deux sous-espaces propres de A.
   (c) En déduire qu'il existe une matrice $Q \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, que l'on écrira à l'aide de quatre «blocs» de $\mathcal{E}$, et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = QDQ^{-1}.$$

Partie C : Quatre tours et un soldat

Un fort est constitué de quatre tours notées T_1, T_2, T_3 et T_4. Ce fort est gardé en permanence par un soldat et à chaque relève, le successeur remplace le soldat relevé à la tour où ce dernier se trouvait. Des passages permettent de se déplacer d'une tour à l'autre. On admet que, à chaque heure :

— si le soldat de garde est en T_1 alors il reste toujours en T_1.

— si le soldat de garde est en T_2 alors il reste toujours en T_2.
— si le soldat de garde est en T_3, alors il se rend en T_1 avec une probabilité de $\frac{3}{20}$.
— si le soldat de garde est en T_3, alors il se rend en T_2 avec une probabilité de $\frac{1}{20}$.
— si le soldat de garde est en T_3, alors il ne se rend jamais en T_4.
— si le soldat de garde est en T_4, alors il se rend en T_1 avec une probabilité de $\frac{1}{20}$.
— si le soldat de garde est en T_4, alors il se rend en T_2 avec une probabilité de $\frac{3}{20}$.
— si le soldat de garde est en T_4, alors il ne se rend jamais en $T3$.

On note $X_n \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont le i-ième coefficient (pour $i \in [\![1,4]\!]$) est la probabilité que le soldat de garde se trouve à l'heure n à la tour T_i.

On note enfin α_n le premier coefficient de X_n, β_n son second coefficient et γ_n son troisième coefficient. En particulier, à l'instant initial, la position du soldat est donnée par $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) \in [0,1]^3$ tel que $0 \leqslant \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 \leqslant 1$.

1. (a) Déterminer le quatrième coefficient de X_n, noté δ_n, en fonction de α_n, β_n et γ_n..
   (b) Démontrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ (à écrire à l'aide de quatre «blocs» de $\mathcal{E}$) telle que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n.$$
   (c) Expliciter A^n et en déduire une expression de X_n en fonction de α_0, β_0, γ_0 et n.
2. On munit l'espace usuel d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note M_n le point de coordonnées $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$.
   (a) Démontrer que M_n est situé à l'intérieur d'un tétraèdre $\mathcal{T}$ dont on précisera les sommets.
   (b) Démontrer que M_n est barycentre des quatre sommets de $\mathcal{T}$ et en préciser des coefficients.
   (c) Démontrer que si M_0 est le point moyen des quatre sommets de $\mathcal{T}$ alors :
   $$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \beta_n = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \gamma_n = 0.$$
   Interpréter ces limites en termes de position limite du point M_n et en termes probabilistes.