SESSION 2018

CONCOURS G2E

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites pour cette épreuve.
L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.
Si, au cours de l'épreuve, le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.
Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.
Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas.
Les deux problèmes sont indépendants.

PROBLÈME 1

On rappelle que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à p lignes et p colonnes et à coefficients réels. Par convention, si $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ alors M^0 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel. On s'intéresse à deux populations d'oiseaux notées $\mathcal{P}_1$ (étudiée dans la partie A) et $\mathcal{P}_2$ (étudiée dans la partie B). Dans chacune de ces populations, la moitié sont des oiselles (c'est-à-dire des femelles) et on modélise l'évolution de l'effectif de ces oiselles en fonction de n, le nombre d'années écoulées depuis un instant initial correspondant à $n = 0$.

Ces deux parties peuvent être abordées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A : Premier exemple dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1. Soient les deux matrices :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ \frac{3}{20} & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$
   (a) Calculer $\det(P)$ puis P^{-1}.
   (b) Démontrer que A est diagonalisable et qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$.
2. Les oiselles de $\mathcal{P}_1$ sont classées en deux catégories :
   — les oiselles jeunes, c'est-à-dire celles qui sont âgées de moins d'un an. L'effectif des oiselles jeunes est noté j_n.
   — les oiselles adultes, c'est-à-dire celles qui sont âgées d'au moins un an. L'effectif des oiselles adultes est noté a_n.

   Une étude sur le terrain a permis de conclure que :

— chacune de ces oiselles donne naissance en moyenne à une oiselle pendant sa première année de vie et à 5 oiselles pendant sa deuxième année.
— 15% des oiselles survivent au delà de leur première année mais jamais au delà de leur seconde année.

On note :

$$X_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} \text{ et } X'_n = P^{-1} X_n.$$

(a) Justifier que $X_{n+1} = A\, X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) À l'aide d'une démonstration par récurrence, en déduire une expression de X'_n en fonction de X'_0 et D.

(c) En supposant j_0 et a_0 non nuls, démontrer que j_n et a_n sont équivalents à des termes généraux de suites géométriques.

Partie B : Second exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. Soit la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Démontrer que 2 et -1 sont les deux seules valeurs propres de B, déterminer les espaces propres de B et en déduire que B n'est pas diagonalisable.

(b) Démontrer que B est semblable à la matrice T ci-dessous :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.

2. Les oiselles de $\mathcal{P}_2$ sont classées en trois catégories :
— les oiselles jeunes, c'est-à-dire celles qui sont âgées de moins d'un an. L'effectif des oiselles jeunes est noté J_n.
— les oiselles préadultes, c'est-à-dire celles qui sont âgées d'un an à moins de deux ans. L'effectif des oiselles préadultes est noté P_n.
— les oiselles adultes, c'est-à-dire celles qui sont âgées d'au moins deux ans. L'effectif des oiselles adultes est noté A_n.

Une étude sur le terrain a permis de conclure que :
— une oiselle de moins d'un an n'est pas féconde.
— chaque oiselle donne, en moyenne, naissance à 4 oiselles durant sa deuxième année de vie et autant pendant sa troisième année.
— 75% des oiselles survivent au delà de leur première année.
— les deux tiers des oiselles vivantes à la fin de la deuxième année survivent, mais jamais au delà de la troisième année.

(a) Établir une relation entre la matrice colonne de coefficients J_{n+1}, P_{n+1} et A_{n+1} et la matrice colonne de coefficients J_n, P_n et A_n puis en déduire qu'il existe une matrice inversible $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} J_n \\ P_n \\ A_n \end{pmatrix} = Q\, T^n\, Q^{-1} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix}.$$

(b) En déduire enfin qu'il existe trois matrices C_1, C_2 et C_3 appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} J_n \\ P_n \\ A_n \end{pmatrix} = \left(2^n C_1 + (-1)^n C_2 + n(-1)^n C_3\right) \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix}.$$

3. On note S_n l'effectif total des oiselles de $\mathcal{P}_2$, on admet que J_0, A_0 et P_0 sont non nuls et que :

$$C_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{32}{27} & \frac{8}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{18} & \frac{4}{27} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

(a) Démontrer que les suites (J_n), (P_n) et (A_n) divergent vers $+\infty$.

(b) Calculer $\mathrm{rg}(C_1)$ puis déterminer également les limites des suites $\left(\frac{J_n}{S_n}\right)$, $\left(\frac{P_n}{S_n}\right)$ et $\left(\frac{S_{n+1}}{S_n}\right)$.

PROBLÈME 2

Dans tout le problème, k désigne un entier naturel non nul. On rappelle qu'une somme ayant un ensemble d'indice vide est nulle.

Dans la partie A, on considère deux fonctions réelles de deux variables réelles à partir desquelles on construit une fonction réelle d'une seule variable réelle dont on cherche par deux méthodes la limite en $\frac{1}{2}$. Cette dernière fonction est réutilisée dans la partie B où on étudie trois variables aléatoires. On calcule en particulier les espérances de deux d'entre elles. Enfin, dans la partie C, on s'intéresse à des probabilités de victoires dans deux jeux de hasard.

Ces trois parties ne sont pas indépendantes.

Partie A : Étude de trois fonctions

On considère la fonction f_k définie par :

$$\forall (x,y) \in]0,1[^2, \quad f_k(x,y) = x^k y - x y^k.$$

De plus, g_k et φ_k désignent les fonctions définies par :

$$g_k(x,y) = \frac{f_k(x,y)}{x-y}, \qquad \varphi_k(x) = g_k(x, 1-x).$$

1. Représenter à l'aide d'un schéma l'ensemble l'ensemble de définition de g_k noté $\mathcal{D}_1$ puis déterminer l'ensemble de définition de φ_k noté $\mathcal{D}_2$.
2. Dans cette question, on cherche par deux méthodes la limite de φ_k en $\frac{1}{2}$.

(a) Calculer les dérivées partielles de f_k en tout $(x,y) \in]0,1[^2$ (on admet que f_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[^2$) et en déduire le nombre dérivé de $x \mapsto f_k(x, 1-x)$ en $\frac{1}{2}$.

(b) En déduire que :

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \varphi_k(x) = \frac{k-1}{2^k}.$$

(c) Démontrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}_1, \quad g_k(x,y) = xy \sum_{i=0}^{k-2} x^i y^{k-2-i}.$$

(d) Retrouver alors la limite de φ_k en $\frac{1}{2}$.

3. Démontrer que φ_k est prolongeable par continuité en $\frac{1}{2}$. Dorénavant, on confond φ_k avec son prolongement par continuité.
4. Soit $x \in]0,1[$.
   (a) Calculer $\lim_{k\to+\infty} \varphi_k(x)$.
   (b) Démontrer que $x(1-x)^{k-1} \leqslant \varphi_k(x)$ pour tout entier naturel $k \geqslant 2$.
   (c) Démontrer que :
   $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi_{k+1}(x) = x(1-x)^k + x\varphi_k(x).$$
   (d) En déduire le sens de variation de la suite de terme général $\varphi_k(x)$, définie pour $k \in \mathbb{N}^*$.
   (e) Justifier que la série de terme général $\varphi_k(x)$ est convergente puis que :
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_k(x) = 1.$$

Partie B : Trois variables aléatoires réelles

Soit une pièce de monnaie pouvant tomber sur pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et sur face avec la probabilité $1-p$. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer indéfiniment cette pièce. Ces lancers sont supposés mutuellement indépendants. En notant simplement p pour pile et f pour face, on obtient ainsi une suite à valeurs dans $\{\mathrm{p}, \mathrm{f}\}$. Par exemple :

$$\mathrm{f\,f\,p\,p\,p\,f\,f\,p\,p\,f}\ldots$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note enfin p_k l'événement «p apparaît au $k^{\text{ième}}$ lancer» et f_k l'événement «f apparaît au $k^{\text{ième}}$ lancer».

1. On note T_{p} le numéro du lancer où apparaît «pile» pour la première fois (dans l'exemple proposé, on a $T_{\mathrm{p}} = 3$) et T_{fp} le numéro du lancer où apparait le motif «face pile» pour la première fois (dans l'exemple proposé, on a également $T_{\mathrm{fp}} = 3$).
   (a) Justifier que T_{p} suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
   (b) Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(T_{\mathrm{fp}} = k+1|\mathrm{f}_1) = P(T_{\mathrm{p}} = k)$.
   (c) À l'aide de la famille d'événements $(\mathrm{p}_1, \mathrm{f}_1)$, démontrer que :
   $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(T_{\mathrm{fp}} = k+1) = p(1-p)^k + pP(T_{\mathrm{fp}} = k).$$
   (d) φ_k désignant la fonction introduite dans la partie précédente, en déduire que :
   $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(T_{\mathrm{fp}} = k) = \varphi_k(p).$$
2. (a) Justifier qu'il est presque certain que le motif «face pile» apparaît lors de l'expérience.
   (b) En distinguant le cas $p = \frac{1}{2}$ et le cas $p \neq \frac{1}{2}$, démontrer que :
   $$\mathbf{E}(T_{\mathrm{fp}}) = \frac{1}{p(1-p)}.$$
3. On note T_{pp} le numéro du lancer où apparait le motif «pile pile» pour la première fois (dans l'exemple proposé, on a $T_{\mathrm{pp}} = 4$).
   (a) À l'aide de la famille d'événements $(\mathrm{f}_1, \mathrm{p}_1 \cap \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_1 \cap \mathrm{f}_2)$, démontrer que :
   $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(T_{\mathrm{pp}} = k+2) = (1-p)P(T_{\mathrm{pp}} = k+1) + p(1-p)P(T_{\mathrm{pp}} = k).$$

(b) Démontrer que le polynôme $X^2 - (1-p)X - p(1-p)$ admet deux racines distinctes r_1 et r_2 appartenant à $]-1,1[$, puis exprimer $r_1 + r_2$ et $r_1 r_2$ en fonction de p.

(c) Justifier qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(T_{\text{pp}} = k) = \lambda r_1^k + \mu r_2^k.$$

(d) Calculer $P(T_{\text{pp}} = 1)$ et $P(T_{\text{pp}} = 2)$ et en déduire que $\lambda r_1 + \mu r_2 = 0$, $\lambda + \mu = \frac{p}{1-p}$ et $\lambda r_2 + \mu r_1 = p$.

4. (a) On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(T_{\text{pp}} = k) = 1$. Que peut-on en conclure ?

(b) Démontrer que :

$$\mathbf{E}(T_{\text{pp}}) = \frac{1+p}{p^2}.$$

Partie C : Deux jeux à pile ou face

Alice, Bérénice et Candice décident de jouer à pile ou face en reproduisant l'expérience aléatoire décrite dans la partie précédente.

1. Dans un premer temps, Alice joue contre Bérénice. Alice gagne la partie si «pile» apparaît strictement avant le motif «face pile» et Bérénice gagne la partie si le motif «face pile» apparaît avant ou au même instant que «pile». On note A l'événement «Alice gagne» et B l'événement «Bérénice gagne».

   (a) Calculer $P(A)$ et $P(B)$.

   (b) À quelle condition sur p, Bérénice a-t-elle une plus grande probabilité de victoire qu'Alice ?

2. Dans un second temps, Bérénice joue contre Candice. Bérénice gagne la partie si le motif «face pile» apparaît avant le motif «pile pile» et Candice gagne la partie si le motif «pile pile» apparaît avant le motif «face pile». On note toujours B l'événement «Bérénice gagne» et C l'événement «Candice gagne».

   (a) Que peut-on dire de la famille d'événements (B, C) ?

   (b) Démontrer que $P(C) = p^2$ et en déduire à quelle condition sur p, Bérénice a une plus grande probabilité de victoire que Candice.

   (c) Est-il possible que la victoire de Bérénice soit plus probable que la victoire de Candice alors que le temps d'attente moyen du motif «face pile» est supérieur au temps d'attente moyen du motif «pile pile» ?