SESSION 2017

CONCOURS G2E

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites pour cette épreuve.
L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.
Si, au cours de l'épreuve, le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.
Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.
Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas.
Les deux problèmes sont indépendants.

PROBLÈME 1

Dans ce problème, on s'intéresse à un jeu télévisé dans lequel il s'agit de remporter plusieurs victoires consécutives pour gagner la «super cagnotte».

La partie A est consacrée à la démonstration de quelques propriétés de deux séries très classiques. Un cas simple de ce jeu est étudié dans la partie B (indépendante de la partie A). Cette étude, généralisée dans la partie C, amène à étudier des variables aléatoires suivant des lois géométriques puis la somme de ces variables aléatoires.

n désigne un entier naturel non nul. Par ailleurs, on rappelle que :

$$0{,}65 \leqslant \ln(2) \leqslant 0{,}7.$$

Partie A : Étude de deux séries réelles

L'objectif de cette partie est d'étudier quelques propriétés des deux séries réelles de termes généraux $\frac{1}{k}$ et $\frac{1}{k^2}$ (pour $k \in \mathbb{N}^*$). Les sommes partielles sont donc définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

1. Rappeler sans justification la nature (convergence ou divergence) de ces deux séries.
2. (a) Énoncer le théorème donnant la formule des accroissements finis (en particulier, on précisera avec soin les hypothèses de ce théorème).

(b) À l'aide de la fonction logarithme népérien, démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

(c) En déduire un encadrement de $\frac{1}{k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ puis démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) \leqslant A_n \leqslant \ln(n) + 1.$$

(d) En déduire enfin que :

$$A_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n).$$

3. On considère les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}, \quad \begin{cases} u_n = A_{n-1} - \ln(n) \\ v_n = A_n - \ln(n) \end{cases}.$$

(a) Démontrer que $u_4 \geqslant 0{,}4$ et $v_4 \leqslant 0{,}8$.

(b) Étudier les sens de variation de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}}$ et démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}}$ convergent vers un même réel noté ℓ puis déterminer un encadrement de ℓ.

4. (a) Démontrer qu'il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}, \quad \frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-1}.$$

(b) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, $\frac{1}{k(k-1)} \leqslant \frac{2}{k^2}$ et en déduire que la série de terme général $\frac{1}{k(k-1)}$ est convergente.

(c) Calculer $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ et en déduire que (B_n) est majorée par 2.

Partie B : 3 cadeaux

Lors d'un jeu télévisé, le gagnant de la partie gagne le droit de faire tourner une roue sur laquelle se trouve une bille. La surface de cette roue est découpée en trois zones numérotées de 1 à 3 et ayant chacune la même aire. Lorsque la roue a cessé de tourner, la bille se trouve sur une zone qui rapporte chacune un cadeau différent. Si un candidat gagne plusieurs parties et remporte les trois différents cadeaux, il touche enfin la «super cagnotte».

On suppose que les comportements de la roue et de la bille lors d'une victoire sont indépendants des résultats lors des victoires précédentes.

1. (a) Quelle est la probabilité que la zone sur laquelle se trouve la bille à l'issue de la première victoire soit la zone numéro 1 ?

   (b) Quelle est la probabilité que la zone sur laquelle se trouve la bille à l'issue de la seconde victoire ne soit pas la zone numéro 1 ?

2. (a) Quelle est la probabilité que la bille se trouve sur la zone numéro 1 au moins 3 fois en 4 victoires ?

   (b) Quelle est la probabilité que la bille se trouve sur deux zones distinctes atteintes exactement deux fois en 4 victoires ?

3. Déduire de ce qui précède que la probabilité que la «super cagnotte» ait été remportée en (au plus) 4 victoires est égale à $\frac{4}{9}$.

Partie C : n cadeaux

On généralise l'étude de la partie précédente et on considère dorénavant que la surface de la roue est découpée en n zones de même aire. Ces zones sont numérotées de 1 à n.

De même que précédemment, si le candidat gagne les n différents cadeaux, il touche la «super cagnotte». De plus, les comportements de la roue et de la bille lors d'une victoire sont toujours indépendants des résultats lors des victoires précédentes.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $i-1$ cadeau(x) différent(s) ayant déjà été gagné(s), on note T_i la variable aléatoire correspondant au nombre de victoire(s) supplémentaire(s) pour gagner un i-ième cadeau différent. Par exemple, si $n \geqslant 3$ et que les numéros des premières zones atteintes par la bille sont 2, 2, 2, 3, 1 alors :

— T_1 prend la valeur 1 (correspondant à la première victoire).
— T_2 prend la valeur 3 (correspondant aux seconde, troisième et quatrième victoires).
— T_3 prend la valeur 1 (correspondant à la cinquième victoire).

1. (a) Justifier que T_1 suit une loi certaine et que $\mathbf{E}(T_1) = 1$.
   (b) Quel est l'ensemble des valeurs prises par T_2 ? Justifier que $P(T_2 > 1) = \frac{1}{n}$.
2. (a) Démontrer que T_i suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
   (b) En déduire que :
$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \mathbf{E}(T_i) = \frac{n}{n-i+1} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V}(T_i) = \frac{n(i-1)}{(n-i+1)^2}.$$
3. On note S_n la variable aléatoire correspondant au nombre de victoires nécessaires pour remporter la «super cagnotte».
   (a) Justifier que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i.$$
   (b) Déduire de ce qui précède (*cf.* partie A) que $\mathbf{E}(S_n) = n\,A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) En déduire que $\mathbf{E}(S_{16}) \leqslant 61$.
4. (a) Démontrer par récurrence que les variables aléatoires $(T_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont indépendantes.
   (b) En déduire $\mathbf{V}(S_n)$ en fonction de A_n et B_n (*cf.* partie A) et calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{V}(S_n)$.
   (c) Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{V}(S_n) \leqslant 2n^2.$$
5. (a) Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad P\left(|S_n - n\,A_n| \geqslant n\alpha\right) \leqslant \frac{2}{\alpha^2}.$$
   (b) En déduire, lorsque $n = 16$, un nombre suffisant de victoires pour remporter la «super cagnotte» avec une probabilité d'au moins 98 pour cent.

PROBLÈME 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique (classiquement noté $\cdot$). On rappelle que le spectre d'un endomorphisme (noté sp) est l'ensemble de ses valeurs propres. Pour tout $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, on cherche à déterminer si f vérifie la propriété (P) ci-dessous :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x \cdot f(x) \geqslant 0 \qquad (P).$$

La partie A fait intervenir une équation différentielle et est consacrée à un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Dans la partie B, on étudie une projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ et dans la partie C, on démontre des résultats plus généraux avant de les appliquer à deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. Ces trois parties sont indépendantes.

Partie A : Premier exemple dans $\mathbb{R}^2$

1. Déterminer les fonctions solutions de l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) = \frac{2}{3}y'(t) - \frac{1}{9}y(t).$$

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et φ la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = (at + b)\mathrm{e}^{\frac{t}{3}}.$$

   (a) Démontrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi^{(n)}(t) = (a_n t + b_n)\mathrm{e}^{\frac{t}{3}}.$$

   (b) Démontrer que (a_n) et (b_n) satisfont à la même relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{2}{3}a_{n+1} - \frac{1}{9}a_n, \quad b_{n+2} = \frac{2}{3}b_{n+1} - \frac{1}{9}b_n.$$

   (c) Déterminer a_n et b_n en fonction de a, b et n.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la matrice colonne de coefficients a_n et a_{n+1}.

   (a) Démontrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = \frac{1}{9}\,AX_n.$$

   (b) f désignant l'endomorphisme canoniquement associé à A, vérifier que $\mathrm{sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$.

   (c) Calculer $f(-2,1)$ puis déterminer si f vérifie (P).

Partie B : Une projection orthogonale dans $\mathbb{R}^3$

On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on considère la matrice A définie ci-dessous dont on note f l'endomorphisme canoniquement associé :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ (en donner une base) puis démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad f(x) - x \in \mathrm{Ker}\, f.$$

   (b) Déterminer $\mathrm{Im}\, f$ et justifier que $\mathrm{Im}\, f$ est un plan $\mathscr{P}$ dont on donnera une équation cartésienne et un vecteur normal.

   (c) En déduire que f est la projection orthogonale sur $\mathscr{P}$.

2. Soit $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Calculer la distance de x au plan $\mathscr{P}$ et en déduire que :

$$\frac{|2x_1 - x_2 + x_3|}{\sqrt{6}} \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

(b) En déduire également que :

$$-4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 \leqslant 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2.$$

(c) Calculer $x \cdot f(x)$ et démontrer que f vérifie (P).

Partie C : Deux exemples dans $\mathbb{R}^n$

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul. I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note f l'endomorphisme canoniquement associé à A et f^* l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice transposée de A, notée ${}^tA$.

1. (a) Démontrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x \cdot f(x) = x \cdot f^*(x).$$
   (b) En déduire que f vérifie (P) si et seulement si $f + f^*$ vérifie (P).
   (c) Justifier qu'il existe une matrice inversible $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tQ = Q^{-1}$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :
$$A + {}^tA = QDQ^{-1}.$$
   (d) En déduire que f vérifie (P) si et seulement si $\mathrm{sp}(f + f^*) \subset \mathbb{R}_+$.
2. Dorénavant A et B désignent les deux matrices ci-dessous appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Démontrer que f vérifie (P) si et seulement si g, endomorphisme canoniquement associé à B, vérifie (P).
   (b) Justifier que g n'est pas diagonalisable.
   (c) Calculer $\mathrm{rg}(A - I)$ et en déduire que les valeurs propres de A sont 1 et $n + 1$. Que peut-on en conclure ?
3. Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Poisson de paramètre 1.
   (a) Démontrer que la matrice A définie en 2. est la matrice dont le coefficient en i-ième ligne et j-ième colonne vaut $\mathbf{E}(X_iX_j)$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
   (b) Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que :
$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x \cdot f(x) = \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_iX_i\right)^2\right).$$
   (c) Retrouver que f vérifie (P).