SESSION 2016

CONCOURS G2E

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites pour cette épreuve.
L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.
Si, au cours de l'épreuve, le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.
Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.
Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas.
Les deux problèmes sont indépendants.

PROBLÈME 1

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Dans tout le problème on munit $\mathbb{R}^n$ de sa base canonique notée $(e_1, \dots, e_n)$ et de son produit scalaire usuel. On rappelle que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A et si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors $\overline{A}$ est la matrice conjuguée de A (c'est-à-dire celle dont les coefficients complexes sont les conjugués des coefficients de A).

On confond les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et les matrices colonnes correspondantes.

Enfin on note $E = [\![1, n]\!]$ et $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E.

La partie A est consacrée à l'étude de certaines matrices réelles diagonalisables dans $\mathbb{C}$. Les puissances de ces matrices sont utilisées dans la partie B pour modéliser des probabilités. Dans la partie C on étudie une variable aléatoire liée au choix aléatoire d'une partie d'un ensemble. Cette étude est complétée dans la partie D et permet de calculer une somme.

Partie A : Une matrice particulière

On considère la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ci-dessous :

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Calculer le rang de J_n. Quel est son noyau ?
   (b) Démontrer que $(J_n e_1, \dots, J_n e_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
   (c) En déduire ${}^t J_n\, J_n$ et J_n^{-1}.
2. Démontrer que 1 est valeur propre de J_n et préciser l'espace propre associé.
3. On cherche à diagonaliser J_n dans $\mathbb{C}$ et pour tout $k \in E$, on considère le vecteur de $\mathbb{C}^n$ ci-dessous :

$$u_k = (\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}\times 0}, \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}\times 1}, \dots, \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}\times (n-1)}).$$

   (a) Calculer u_n. u_n est-il vecteur propre de J_n ?
   (b) Démontrer que pour tout $k \in E$, u_k est vecteur propre de J_n pour la valeur propre $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}$. En déduire que J_n est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Partie B : Cas où $n = 4$

Dans cette partie on suppose que $n = 4$ et k désigne un entier naturel.

1. (a) Déterminer une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ et une matrice $P \in \mathcal{GL}_4(\mathbb{C})$ telles que la matrice J_4 (*cf.* partie A) soit égale à PDP^{-1} puis calculer ${}^t\overline{P}$ et en déduire P^{-1}.
   (b) Calculer J_4^2 (J_4 au carré), J_4^3 (J_4 au cube) et J_4^4 (J_4 à la puissance 4).
2. On considère l'ensemble :

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & s \end{pmatrix},\ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

   (a) Démontrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ dont (I, J_4, J_4^2, J_4^3) est une base (I désignant la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$). Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?
   (b) Soit $A \in \mathcal{E}$. Déduire des questions précédentes qu'il existe une matrice diagonale Δ telle que $A = P\Delta P^{-1}$ et préciser les valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 de A.
3. Une usine de traitement des déchets industriels procède chaque semaine au prélévement de 4 échantillons le long du cycle de traitement. Si le contenu d'un échantillon de numéro $i \in [\![1, 4]\!]$ est contaminé alors on peut modéliser la propagation de la contamination grâce à une matrice $A \in \mathcal{E}$. En effet si un problème est décelé à l'échantillon i alors la probabilité de retrouver cette contamination à un échantillon $j \in [\![1, 4]\!]$ la semaine suivante est la j-ième coordonnée de Ae_i et plus généralement au bout de k semaines cette probabilité est la j-ième coordonnée de $A^k e_i$
   (a) Exprimer A^k à l'aide de P, λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4.
   (b) Des relevés statistiques ont montré qu'on a toujours $a+b+c+d = 1$ et $(a, b, c, d) \in [0, \frac{1}{2\sqrt{2}}[^4$. Étudier la convergence des suites (λ_1^k), (λ_2^k), (λ_3^k) et (λ_4^k).
   (c) En déduire que (Δ^k) converge (c'est-à-dire que tous les coefficients de Δ^k convergent) vers une matrice δ et calculer $P\delta P^{-1}$. Comment interpréter ce dernier résultat ?

Partie C : Quand un laboratoire choisit les échantillons

On revient au cas général et on suppose dorénavant que n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Les n échantillons de l'usine de traitement sont relevés par un laboratoire qui choisit d'analyser une partie de ces échantillons (partie choisie de façon équiprobable, éventuellement réduite à l'ensemble vide ou égale à l'ensemble des n échantillons).

Pour une semaine donnée, on considère X la variable aléatoire correspondant au nombre d'échantillons analysés.

1. (a) Rappeler $\mathrm{card}\,\mathcal{P}(E)$ puis démontrer que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(X = k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

   (b) Quelle est la loi suivie par X ? Quels sont les paramètres de cette loi ?

   (c) Quel est le nombre moyen d'échantillons analysés par ce laboratoire ?

2. Calculer le plus petit entier naturel n non nul tel qu'on est certain à strictement plus de 99% qu'au moins un échantillon a été analysé.

Partie D : Quand deux laboratoires choisissent les échantillons

On suppose dorénavant que deux laboratoires L_1 et L_2 choisissent chacun de manière indépendante et équiprobable une partie quelconque des n échantillons. La partie des échantillons analysés par L_1 est notée $\mathcal{P}_1$ et la partie des échantillons analysés par L_2 est notée $\mathcal{P}_2$.

1. On note X_1 la variable aléatoire correspondant au nombre d'échantillons analysés par L_1 et B désigne l'événement $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$.

   (a) Démontrer que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(B|X_1 = k) = \frac{1}{2^k}.$$

   (b) En déduire $P(B)$.

2. On note Y la variable aléatoire correspondant au cardinal de $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

   (a) Les variables aléatoires X_1 et Y sont-elles indépendantes ?

   (b) Calculer $P(Y = i|X_1 = k)$ pour tout $(i, k) \in [\![0, n]\!]^2$.

   (c) En déduire la loi de Y.

3. (a) Démontrer que :

$$\forall k \in E, \quad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

   (b) Déduire enfin des questions précédentes que :

$$\sum_{(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) \in \mathcal{P}(E)^2} \mathrm{card}(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2) = n4^{n-1}.$$

PROBLÈME 2

Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul et a, λ et λ' sont des réels strictement positifs.

On rappelle que $n!$ désigne la factorielle de n.

Dans la partie A, on détermine l'ensemble de définition d'une fonction définie par une intégrale. Dans la partie B, on établit quelques propriétés remarquables de cette fonction et on en calcule des valeurs. Cette fonction est utilisée dans la partie C pour construire une densité de probabilité dont on constate qu'elle est en lien avec les lois de Poisson.

Partie A : Ensemble de définition d'une fonction définie par une intégrale

Soit Γ la fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$ par :

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

1. (a) Calculer $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x+1}$ et en déduire qu'il existe $T \in [1, +\infty[$ tel que :
   $$\forall t \in [1,+\infty[, \quad t \geqslant T \Rightarrow \mathrm{e}^{-t}t^{x-1} \leqslant \frac{1}{t^2}.$$
   (b) Pour quelles valeurs de x, $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?
2. (a) Démontrer que $\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$ et donner dans ce cas la valeur de cette intégrale.
   (b) En déduire que $\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$.
3. Déduire des questions précédentes l'ensemble de définition de Γ.

Partie B : Quelques propriétés de cette fonction

1. (a) Démontrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x) > 0.$$
   (b) Démontrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$
   (c) Calculer $\Gamma(1)$ puis démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$
2. On admet que Γ a une limite en 1, en 0^+ et en $+\infty$.
   (a) Déterminer ces trois limites.
   (b) Déterminer également $\lim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma(x)}{x}$.
3. (a) Rappeler la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ et en déduire $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$.
   (b) À l'aide d'un changement de variable que l'on justifiera avec soin, démontrer que :
   $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$
   (c) En déduire enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$ à l'aide de factorielles.

Partie C : Une densité de probabilité

On rappelle que $(a, \lambda, \lambda') \in {\mathbb{R}_+^*}^3$ et on considère la fonction $f_{a,\lambda}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_{a,\lambda}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\mathrm{e}^{-\lambda x}x^{a-1} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

1. (a) Étudier la continuité de $f_{a,\lambda}$ sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer à quelle condition nécessaire et suffisante, $f_{a,\lambda}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Étudier les variations de $f_{a,\lambda}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. (a) Justifier que $f_{1,\lambda}$ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire suivant une loi que l'on précisera.
   (b) Plus généralement, montrer que $f_{a,\lambda}$ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
   (c) Quelle est alors une densité de la variable aléatoire $Y = \frac{\lambda}{\lambda'}X$?
3. Démontrer que :
$$E(X) = \frac{a}{\lambda}.$$
4. On suppose dans cette dernière question que a est un entier naturel non nul et on note t un réel strictement positif. Z désigne une variable aléatoire suivant une loi de Poisson.
   (a) Démontrer que la fonction ci-dessous est une primitive de $f_{a,\lambda}$ sur $\mathbb{R}^*$:
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad F_{a,\lambda}(x) = \begin{cases} -\sum_{k=0}^{a-1} \frac{(\lambda x)^k \mathrm{e}^{-\lambda x}}{k!} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}.$$
   (b) En déduire $P(X > t)$.
   (c) En déduire enfin que $P(X > t) = P(Z < a)$ en précisant le paramètre de la variable aléatoire Z.