SESSION 2014

CONCOURS G2E

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites pour cette épreuve.
L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.
Si, au cours de l'épreuve, le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.
Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.
Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas.
Les deux problèmes sont indépendants.

PROBLÈME 1

Ce premier problème est relatif aux lois binomiales et normales.

Dans la partie A, on compare deux fonctions polynômiales. Dans la partie B, on calcule des probabilités à l'aide des lois binomiales et on utilise les résultats trouvés dans la partie A. Dans les parties C et D, on exploite la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite fournie en fin de sujet pour calculer certains paramètres et deux probabilités.

Partie A : Étude de deux fonctions

On considère les fonctions f et g définies ci-dessous dont on note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -x^2 + x + 1 \text{ et } g(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$$

1. (a) Étudier les variations de f et g et déterminer leurs limites en $-\infty$ et $+\infty$.
   (b) Démontrer que f et g admettent le même développement limité à l'ordre 1 en 0. Comment peut-on interpréter graphiquement cette égalité ?
2. (a) Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
   (b) Donner l'allure des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ pour $x \in [0, 1]$ (en prenant en compte les informations précédemment obtenues).

Partie B : Calculs de probabilités

Une compagnie aérienne dispose d'une flotte constituée de deux types d'avions : des trimoteurs (un moteur situé en queue d'avion et un moteur sous chaque aile) et des quadrimoteurs (deux moteurs sous chaque aile).

Tous les moteurs de ces avions sont susceptibles, durant chaque vol, de tomber en panne avec la même probabilité $x \in]0,1[$ et indépendamment les uns des autres. Toutefois, les trimoteurs peuvent achever leur vol si le moteur situé en queue ou les deux moteurs d'ailes sont en état de marche et les quadrimoteurs le peuvent si au moins deux moteurs situés sous deux ailes distinctes sont en état de marche.

1. On note X_3 (repsectivement X_4) la variable aléatoire correspondant au nombre de moteurs en panne sur un trimoteur (respectivement un quadrimoteur) durant un vol.
   (a) Quelles sont les lois suivies par X_3 et X_4 ?
   (b) Calculer la probabilité que strictement moins de la moitié des moteurs du trimoteur tombent en panne. Même question pour le quadrimoteur.
2. (a) On note T l'événement « le trimoteur achève son vol ». Démontrer que :

$$P(T) = (1-x)(-x^2+x+1)$$

   (b) On note Q l'événement « le quadrimoteur achève son vol ». Démontrer que :

$$P(Q) = (1-x)^2(1+x)^2$$

3. Déterminer, des quadrimoteurs ou des trimoteurs, quels sont les avions les plus sûrs.

Partie C : Utilisation d'une loi normale

Certaines pièces de ces moteurs sont soumises à de très fortes températures et la durée de vie de ces pièces (exprimée en milliers d'heures) est une variable aléatoire C dont on admet qu'elle suit une loi normale.

En fin de sujet, se trouve une annexe donnant la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

1. L'expérience a montré que $P(C \leqslant 80) = 0,975$ et $P(C \leqslant 20) = 0,160$.
   (a) Démontrer que la moyenne m et l'écart-type σ de la variable aléatoire C sont solutions d'un système linéaire.
   (b) En arrondissant les coefficients de ce système aux entiers les plus proches, déterminer des valeurs approchées de m et σ.
2. Calculer à l'aide des valeurs approchées précédentes les probabilités ci-dessous :
   (a) probabilité que la turbine ait une durée de vie supérieure à quatre-vingt-dix mille heures.
   (b) probabilité que la turbine ait une durée de vie de moins de dix mille heures.

Partie D : Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Les quadrimoteurs de cette compagnie disposent de $N \in \mathbb{N}^*$ places. Cette compagnie décide de procéder à une surréservation en prenant pour chaque vol un nombre $n \geqslant N$ de réservations.

La probabilité pour qu'une personne ayant acheté son billet se présente effectivement à l'embarquement est de $p \in]0,1[$ et on admet que les comportements des clients sont indépendants les uns des autres.

On note X la variable aléatoire désignant le nombre de clients qui se présentent à l'embarquement.

1. (a) Démontrer que X suit une loi binomiale dont on précisera la moyenne et l'écart-type en fonction de n et p.

(b) On rappelle que l'on peut approximer une loi binomiale $\mathcal{B}(\alpha, \beta)$ par une loi normale $\mathcal{N}\left(\alpha\beta, \sqrt{\alpha\beta(1-\beta)}\right)$ lorsque $\alpha \geqslant 30$, $\alpha\beta \geqslant 15$ et $\alpha\beta(1-\beta) \geqslant 5$.

Dans cette question uniquement, on suppose que $n = 200$ et $p = 0,8$. Peut-on approximer la loi suivie par X par une loi normale et si oui quels sont ses paramètres (en donner leurs valeurs littérales et numériques) ?

2. On suppose que X suit effectivement une loi normale et on cherche le nombre de réservations que cette compagnie peut accepter sachant qu'elle s'accorde un risque de 4%.

   (a) Justifier que n est solution d'une inéquation de la forme $an + b\sqrt{n} + c \leqslant 0$ où les coefficients a, b et c s'expriment en fonction des données de l'énoncé et à l'aide de la table fournie en annexe.

   (b) Démontrer que cette inéquation admet des solutions et exprimer la meilleure solution du problème en fonction de a, b et c.

PROBLÈME 2

Dans tout ce second problème, n et p sont deux entiers naturels non nuls et on note :

$$S_{p,n} = \sum_{k=1}^{n} k^p$$

Dans la partie A, on calcule l'inverse d'une matrice de taille 3, les résultats obtenus seront repris à la fin de la partie B où on démontre quelques propriétés de $S_{p,n}$ (équivalent, caractère polynômial). Ces propriétés seront exploitées dans le calcul d'une limite d'une probabilité (partie C).

Partie A : Réduction et inversion d'une matrice

1. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ et on considère la matrice ci-dessous représentant trois polynômes (R, S, T) dans la base canonique :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Préciser les polynômes R, S et T.

   (b) Déterminer les valeurs propres de M et en déduire que M est diagonalisable.

   (c) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $M = PDP^{-1}$.

2. (a) Calculer M^{-1}. Que peut-on déduire de l'existence de M^{-1} concernant la famille (R, S, T) ?

   (b) Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(1 + X)^2 = aR + bS + cT$.

3. Décomposer le polynôme $aX + bX^2 + cX^3$ en produit de facteurs du premier degré.

Partie B : Calcul de l'équivalent d'une somme

f désigne une fonction réelle d'une variable réelle définie sur le segment $[0, 1]$. Cette fonction est strictement croissante, continue et positive.

1. Justifier l'existence de $I_n = n \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et démontrer que $I_n > 0$.

2. (a) Démontrer que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \forall x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], \quad f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{k}{n}\right)$$

(b) En déduire que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

(c) Encadrer le quotient $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}{I_n}$ et en déduire que :

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$$

(d) À l'aide d'une fonction f judicieusement choisie, démontrer que :

$$S_{p,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}$$

3. On considère la famille de polynômes $(P_j)_{1\leqslant j\leqslant p+1}$ définie par :

$$\forall j \in [\![1,p+1]\!], \quad P_j(X) = (1+X)^j - X^j$$

(a) Pour tout $j \in [\![1,p+1]\!]$, exprimer P_j dans la base canonique de $\mathbb{R}_p[X]$ puis écrire la matrice A_p de la famille de polynômes $(P_j)_{1\leqslant j\leqslant p+1}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_p[X]$ en précisant ses coefficients diagonaux.

(b) Justifier que A_p est inversible et en déduire qu'il existe $(\alpha_{j,p})_{1\leqslant j\leqslant p+1} \in \mathbb{R}^{p+1}$ tel que :

$$(1+X)^p = \sum_{j=1}^{p+1} \alpha_{j,p} P_j$$

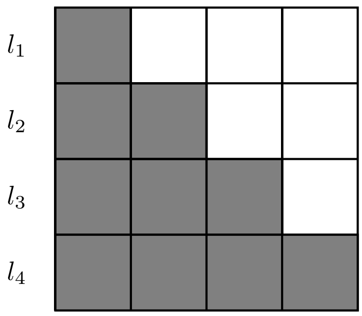
(c) Soit $Q_p \in \mathbb{R}_{p+1}[X]$ tel que $Q_p = \sum_{j=1}^{p+1} \alpha_{j,p} X^j$. Démontrer que $S_{p,n} = Q_p(n)$.

4. (a) Vérifier que $A_2 = M$ (*cf.* partie A).

(b) Retrouver à l'aide des questions précédentes une expression de $\sum_{k=1}^{n} k^2$ sans symbole $\sum$.

Partie C : Calcul de la limite d'une probabilité

On considère un carré de côté n muni d'un quadrillage dans lequel les cases sont grises ou blanches. La figure ci-dessous illustre la situation pour $n = 4$ (mais les calculs devront être menés pour n entier naturel non nul quelconque). Comme indiqué sur la figure, les cases situées sous ou sur une diagonale du carré sont grises, les autres sont laissées blanches. Chaque ligne est notée l_k (pour $k \in [\![1,n]\!]$).



1. Lors d'une expérience aléatoire, on choisit successivement p cases d'une même ligne (les choix de ces p cases sur cette ligne étant alors indépendants les uns des autres) et on considère les événements L_k suivants : « les p cases choisies sont situées sur la ligne l_k » (pour $k \in [\![1, n]\!]$). Calculer $P(L_k)$.
2. On considère également l'événement A : « on a choisi au moins une case blanche parmi les p cases choisies ».
   (a) Expliciter $\overline{A}$ par une phrase.
   (b) Calculer $P(\overline{A}/L_k)$ et en déduire $P(\overline{A})$ et $P(A)$ en fonction de $S_{p,n}$.
   (c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} P(A)$ en fonction de p.

ANNEXE : FONCTION DE RÉPARTITION DE LA LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,519	0,523	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,568	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,625	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,656	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,799	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,827	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,866	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,892	0,894	0,896	0,898	0,890	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918
1,4	0,919	0,921	0,922	0,924	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932
1,5	0,933	0,934	0,936	0,937	0,938	0,939	0,941	0,942	0,943	0,944
1,6	0,945	0,946	0,947	0,948	0,949	0,950	0,951	0,952	0,953	0,954
1,7	0,955	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,961	0,962	0,962	0,963
1,8	0,964	0,965	0,966	0,967	0,967	0,968	0,969	0,969	0,970	0,971
1,9	0,971	0,972	0,973	0,973	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977
2,0	0,977	0,978	0,978	0,979	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982
2,1	0,982	0,983	0,983	0,983	0,984	0,984	0,985	0,985	0,985	0,986
2,2	0,986	0,986	0,987	0,987	0,987	0,988	0,988	0,988	0,989	0,989
2,3	0,989	0,990	0,990	0,990	0,990	0,991	0,991	0,991	0,991	0,992
2,4	0,991	0,992	0,992	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,994
2,5	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995
2,6	0,995	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996
2,7	0,996	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
2,8	0,997	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
2,9	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999