SESSION 2013

CONCOURS G2E

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites pour cette épreuve.
L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.
Si, au cours de l'épreuve, le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.
Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.
Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas.
Les deux problèmes sont indépendants.

PROBLÈME 1

On étudie dans ce problème quelques propriétés d'une variable aléatoire suivant une loi obtenue à partir de la fonction Arctan (partie A). On s'intéresse ensuite à des fonctions obtenues à l'aide de matrices de taille 2. Enfin, dans la partie C, on utilise trois fonctions définies dans la partie B qui donnent des variables aléatoires suivant la loi étudiée dans la partie A.

Partie A : Une densité de probabilité

1. Rappeler les limites de la fonction Arctan aux bornes de son ensemble de définition. Donner sa dérivée et préciser son sens de variation.
   Il n'est pas demandé de justifier les résultats énoncés (dans cette question uniquement).
2. En étudiant les variations de $x \mapsto \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$, démontrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$
   et :
$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$
   On rappelle que Arctan $\frac{\pi}{4} = 1$.
3. Soient $m \in \mathbb{R}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

a. Démontrer que mf est une densité de probabilité si et seulement si $m = \frac{1}{\pi}$.

b. On note dorénavant X une variable aléatoire de densité de probabilité $\frac{1}{\pi}f$.
Préciser la fonction de répartition de X et donner l'allure de sa courbe représentative.

c. Déterminer si X admet une espérance, une variance.

d. Calculer la médiane de X, son premier et son troisième quartile.
On rappelle que la médiane de X est le réel x tel que $P(X \leq x) = \frac{1}{2}$, le premier quartile est le réel x tel que $P(X \leq x) = \frac{1}{4}$ et le troisième quartile est le réel x tel que $P(X \leq x) = \frac{3}{4}$.

Partie B : Des matrices à coefficients complexes

On se place dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et on note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices dont le coefficient en seconde ligne et première colonne n'est pas nul. Soit A une telle matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{avec } (a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4 \text{ et } c \neq 0$$

À toute matrice $A \in \mathcal{M}$ on associe la fonction de variable $z \in \mathbb{C}$ définie par :

$$\varphi_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

1. a. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_{\varphi_A}$ de la fonction φ_A.

   b. Démontrer que si $bc = ad$ alors φ_A est une fonction constante.

   c. Démontrer que si $bc \neq ad$ alors φ_A est une bijection de $\mathcal{D}_{\varphi_A}$ dans $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$ et démontrer qu'il existe une matrice $A' \in \mathcal{M}$ telle que :

$$\varphi_A^{-1} = \varphi_{A'}$$

   d. Établir enfin que si $bc \neq ad$ alors A est inversible et :

$$A^{-1} = \frac{1}{bc - ad} A'$$

2. Soient A_1 et A_2 deux éléments de $\mathcal{M}$ tels que $A_1 A_2 \in \mathcal{M}$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } c_1 \neq 0 \text{ et } c_2 \neq 0$$

   a. Calculer $A_1 \, A_2$.

   b. Déterminer $\varphi_{A_1} \circ \varphi_{A_2}$. Que peut-on en déduire ?
   On ne s'intéressera pas, dans cette question, aux ensembles de définition des fonctions mises en jeu.

3. On suppose dans cette question que $A \in \mathcal{M}$ et que ses coefficients sont réels et vérifient $bc \neq ad$.

   a. Démontrer que si $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ est un vecteur propre de A alors $y \neq 0$.

   b. Démontrer que $(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ est un vecteur propre de A si et seulement si $\varphi_A\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y}$.

   c. En déduire que :

$$(a - d)^2 + 4bc \neq 0 \Rightarrow A \text{ diagonalisable.}$$

   d. Étudier la réciproque de la propriété précédente.

4. Soient les trois éléments de $\mathcal{M}$ suivants :

$$B = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   a. B est-elle inversible ? Quelle est son inverse ?

   b. Calculer C^2 et en déduire le rang de C.

   c. Déterminer également C^{-1} et C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   d. Déterminer une matrice diagonale Δ et une matrice inversible P telle que $D = P\,\Delta\,P^{-1}$. Calculer P^{-1}.

   e. Déterminer D^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Partie C : Des variables aléatoires

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et M le point d'affixe $z_M = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Ω désigne le point d'affixe $\frac{1}{2}$ et $\mathcal{C}$ est le cercle de centre Ω et de rayon $\frac{1}{2}$ privé du point O. La droite (OM) coupe $\mathcal{C}$ en N d'affixe z_N.

1. a. Calculer ON et en déduire que $z_N = \cos\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

   b. Démontrer que $\varphi_B(z_N) = \tan\theta$ puis calculer $(\varphi_C \circ \varphi_B)(z_N)$ pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$ et $(\varphi_D \circ \varphi_B)(z_N)$ pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$ (les matrices B, C et D étant définies dans la partie B).

2. On considère dorénavant que θ suit une loi uniforme sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et on note T la variable aléatoire représentant $\varphi_B(z_N)$.

   a. Démontrer que T suit la même loi que X (*cf.* partie A).

   b. Démontrer qu'il en est de même pour la variable aléatoire représentant $(\varphi_C \circ \varphi_B)(z_N)$.

3. Dans cette dernière question, on considère S la variable aléatoire représentant $(\varphi_D \circ \varphi_B)(z_N)$.

   a. Déterminer la fonction de répartition de S. S est-elle une variable aléatoire à densité ? Si oui, préciser une densité.

   b. Que peut-on dire de S et T ?

4. Déduire des questions précédentes que, quels que soient les entiers naturels n et p, la variable aléatoire représentant $(\varphi_{D^p} \circ \varphi_{C^n} \circ \varphi_B)(z_N)$ suit la même loi que X.

PROBLÈME 2

Ce problème est consacré à l'étude d'une fonction f, solution d'une équation différentielle (partie A) dont on détermine les coefficients du développement limité en 0 dans la partie B. La partie C est relative à l'étude d'une variable aléatoire discrète dans un cas élémentaire, cette étude étant généralisée dans la partie D.

Partie A : Une fonction

1. On considère l'équation différentielle (E) suivante à résoudre sur l'intervalle $]-\infty, 1[$:

$$y + (x-1)y' = \mathrm{e}^{-x} \qquad (E)$$

   a. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
   b. Résoudre (E).
2. On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in]-\infty, 1[, \quad f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x(1-x)}$$

   a. Démontrer que f est l'unique solution de (E) satisfaisant à la condition initiale $y(0) = 1$.
   b. Étudier les variations de f et ses limites en $-\infty$ et 1.
3. Donner, en justifiant, le développement limité à l'ordre de 2 de $f(x)$ au voisinage de 0.

Partie B : Une suite

f désigne toujours la fonction définie dans la partie A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note d_n le coefficient de x^n dans le développement limité de $f(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre n.

1. a. Justifier l'existence de d_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b. Exprimer d_n en fonction de $f^{(n)}(0)$ et préciser d_0, d_1 et d_2.
2. a. En dérivant n fois l'équation (E), démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-\infty, 1[, \quad (n+1)f^{(n)}(x) + (x-1)f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{-x}$$

   On utilisera la formule donnant la dérivée n-ième d'un produit.
   b. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_{n+1} = d_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Partie C : Trois chapeaux

Trois personnes sont invitées à une soirée, chacune de ces personnes arrivant avec un chapeau. Mais ces chapeaux sont redistribués de façon aléatoire à la fin de la soirée, de sorte que chaque invité repart avec exactement un chapeau. On considère la variable aléatoire X qui à chacune de ces redistributions de chapeaux associe le nombre k d'invités ayant retrouvé leur propre chapeau.

1. a. Quel est l'univers de cette expérience aléatoire ? Quel est le cardinal de cet univers ?
   b. Écrire les permutations de $\{1, 2, 3\}$.
   c. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. a. Calculer l'espérance de X.
   b. Calculer sa variance.

Partie D : n chapeaux

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On généralise le problème de la partie C en considérant n personnes invitées à une soirée. Chacune de ces personnes arrive avec un chapeau et ces chapeaux sont redistribués de façon aléatoire à la fin de la soirée, de sorte que chaque invité repart avec exactement un chapeau. On note X_n la variable aléatoire qui désigne le nombre k d'invités ayant retrouvé leur propre chapeau. Enfin on note $p_n = P(X_n = 0)$.

1. a. Justifier que $p_1 = 0$, $p_2 = \frac{1}{2}$ et $p_3 = \frac{1}{3}$
   b. Déterminer p_4.
2. Dorénavant, on pose par convention $p_0 = 1$.
   a. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(X_n = k) = \frac{p_{n-k}}{k!}$$
   b. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{p_{n-k}}{k!} = 1$$
   c. En déduire enfin que (p_n) est caractérisée par :
$$\begin{cases} p_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{p_{n+1-k}}{k!} \end{cases}$$
3. a. Démontrer que l'espérance de X_n est égale à 1 et interpréter ce résultat.
   b. Calculer la variance de X_n.
4. On considère à nouveau la suite définie dans la partie B et on rappelle que celle-ci est caractérisée par :
$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad d_{n+1} = d_n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \end{cases}$$
   a. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} = 0$$
   b. Démontrer par récurrence sur n que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{d_{n-k}}{k!} = 1$$
   c. Déduire des questions précédentes que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = d_n$$
5. a. Démontrer par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$
   b. En déduire que (p_n) converge, donner sa limite et interpréter ce résultat.