SESSION 2009

CONCOURS G2E

MATHEMATIQUES

Durée : 4heures

Les calculatrices ne sont pas autorisées pour cette épreuve.
L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.
Si, au cours de l'épreuve, le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.
Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.
Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas.
Les deux problèmes sont indépendants.

PROBLEME 1

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel.

On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions φ_n et Ψ_n par :

$$\varphi_n : x \mapsto x^n e^{-\frac{x}{2}} \text{ et } \Psi_n : x \mapsto \frac{1}{2^{n+1} n!} \int_0^x \varphi_n(t)\,dt.$$

1.1 a) Dresser les tableaux des variations de φ_0, φ_1 et φ_2.
b) Comparer pour tout x réel $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$.
c) Tracer les graphes de φ_0, φ_1 et φ_2 dans un même repère, en plaçant, en particulier, les points d'intersection entre les courbes.

1.2 Pour tout n non nul, montrer que φ_n prend sur $[0,+\infty[$ une valeur maximum notée M_n.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M_{n+1}}{M_n}$.

1.3 a) Établir, pour tout réel x et tout entier naturel n, une relation entre $\Psi_n(x)$, $\Psi_{n+1}(x)$ et $\varphi_{n+1}(x)$.
b) Calculer, pour tout x réel, $\Psi_0(x)$, $\Psi_1(x)$ et $\Psi_2(x)$.
c) Déterminer, pour tout entier naturel n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \Psi_n(x)$.

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction F_n par :

$$\begin{cases} F_n(x) = \Psi_n(x) \text{ si } x \geq 0, \\ F_n(x) = 0 \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

1.4 a) Montrer que F_n peut être considérée comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire que l'on notera X_n.
b) Déterminer une densité de X_n, qui sera notée f_n.
c) Montrer que X_n admet une espérance et une variance et les calculer. Que peut-on dire de leur rapport ?

1.5 Soit α un réel fixé strictement positif. On considère une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier naturel n, non nul, on ait : $p(T > n) = F_n(\alpha)$. Déterminer la loi de probabilité de T. En déduire l'espérance et la variance de T.

PROBLEME 2

Partie 1

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique $B = (e_1, e_2,\ e_3,\ e_4)$ avec
$e_1 = (1,0,0,0)$; $e_2 = (0,1,0,0)$; $e_3 = (0,0,1,0)$ et $e_4 = (0,0,0,1)$.

Soient f et g les deux endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ dont les matrices dans la base B sont respectivement : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.1.1. Montrer que fog=gof.

2.1.2. Montrer que si v est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, alors soit g(v) est nul, soit g(v) est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

2.1.3. Montrer que le vecteur $v_1 = (1,1,1,1)$ est un vecteur propre commun à f et g. Préciser pour chaque endomorphisme la valeur propre associée.

2.1.4. Déterminer Ker(f) $\cap$ Ker(g).

On considère les vecteurs :

$$v_1 = (1,1,1,1),\ v_2 = (1,-1,1,-1),\ v_3 = (1,0,-1,0),\ v_4 = (0,1,0,-1).$$

2.1.5. Montrer que (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres communs à f et g. On notera cette base B'. Écrire la matrice de passage, notée P, de la base B à la base B'.

2.1.6. Exprimer les vecteurs de la base B en fonction des vecteurs de la base B'. En déduire l'inverse de P.

2.1.7. Donner les matrices de f et g dans la base B', notées respectivement J' et K', ainsi que les relations entre J et J', entre K et K'.

Partie 2

On considère le sous-ensemble E de l'ensemble des matrices réelles carrées de taille 4 défini par :

$$E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & a & a-b & a \\ a & a+b & a & a-b \\ a-b & a & a+b & a \\ a & a-b & a & a+b \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2.2.1. Exprimer $M(a,b)$ en fonction de J et K.

2.2.2. Montrer que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E.

2.2.3. Montrer que pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $M(a,b)$ admet une base de vecteurs propres indépendants de a et b.

2.2.4. En déduire une matrice D(a,b) diagonale semblable à M(a,b). Écrire une relation entre M(a,b) et D(a,b).

2.2.5. Montrer que pour tout entier naturel n, non nul, on a : $[M(a,b)]^n = M\left(4^{n-1}a^n, 2^{n-1}b^n\right)$.

Partie 3

On considère le damier suivant :

B_2	N_1	B_3
N_4	B_1	N_2
B_4	N_3	B_5

Un pion se déplace avec équiprobabilité sur ce damier de la case où il se trouve vers une des cases qui possède avec cette case un côté commun.
Ainsi, si le pion est en N_2, il peut se déplacer vers B_1, B_3 ou B_5, avec des probabilités égales.
On suppose qu'au départ, le pion est sur une case blanche.

2.3.1. Où peut se trouver le pion après un nombre pair de déplacements ? Après un nombre impair de déplacements ?

Posons maintenant pour $n\in\mathbb{N}$, $V_n = \begin{pmatrix} p_{1,n} \\ p_{2,n} \\ p_{3,n} \\ p_{4,n} \\ p_{5,n} \end{pmatrix}$ où pour $k\in[\![1,5]\!]$, $p_{k,n}$ est la probabilité pour que le pion soit sur la case B_k après le (2n)-ième déplacement si $n\neq 0$ et $p_{k,0}$ est la probabilité pour que le pion soit sur la case B_k au départ. Nous noterons $B_{k,n}$ l'évènement : « le pion est sur la case B_k après le (2n)-ième déplacement ».

Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \begin{pmatrix} q_{1,n} \\ q_{2,n} \\ q_{3,n} \\ q_{4,n} \end{pmatrix}$ où pour $k \in [\![1,4]\!]$, $q_{k,n}$ est la probabilité pour que le pion soit sur la case N_k après le (2n-1)-ième déplacement. Nous noterons $N_{k,n}$ l'évènement : « le pion est sur la case N_k après le (2n-1)-ième déplacement ».

2.3.2. Exprimer, pour tout entier n non nul, $(p_{k,n})_{1\le k\le 5}$ en fonction de $(q_{k,n})_{1\le k\le 4}$, puis $(q_{k,n})_{1\le k\le 4}$ en fonction de $(p_{k,n-1})_{1\le k\le 5}$. En déduire deux matrices A et B telles que : $A \in M_{4,5}(\mathbb{R})$, $B \in M_{5,4}(\mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = AV_{n-1}$ et $V_n = BW_n$.

2.3.3. Calculer AB et montrer que AB est un élément de E.

2.3.4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(AB)^n = M\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2\times 3^n}\right)$.

2.3.5. Exprimer de façon simple, pour tout entier naturel n, non nul, $(BA)^n$ en fonction de A, de B et d'une puissance de AB. Calculer $(BA)^n$.

2.3.6. Déterminer, pour tout entier naturel n, non nul, une relation entre V_n et V_0.

2.3.7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité pour que le pion soit sur la case B_1 après le (2n)-ième déplacement ? Que remarque-t-on ?

Nous admettrons que le résultat du n-ième déplacement ne dépend que de la position du pion juste avant ce déplacement et non pas des autres positions précédentes. On a donc, en particulier : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![1,4]\!]$, $P(B_{1,n+1} \mid N_{k,n+1} \cap B_{1,n}) = P(B_{1,n+1} \mid N_{k,n+1})$.

2.3.8. Montrer que, pour tout entier n, non nul, les événements $B_{1,n}$ et $B_{1,n+1}$ sont indépendants.

Nous admettrons, plus généralement, sous l'hypothèse formulée ci-dessus, que la famille d'évènements $(B_{1,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille d'évènements mutuellement indépendants et nous considèrerons, dans les questions qui suivent, que la position de départ n'est pas obtenue à partir d'un déplacement du pion.

2.3.9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue 2n déplacements du pion. Soit la variable aléatoire X qui compte le nombre de fois où le pion a été déplacé sur la case B_1. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance.

2.3.10. On effectue des déplacements du pion jusqu'à ce qu'il soit mené en B_1. Soit la variable aléatoire Y, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ égale au nombre de déplacements nécessaires pour que le pion atteigne la case B_1 pour la première fois. Déterminer la loi de Y, puis déterminer son espérance et sa variance.