SESSION 2008

CONCOURS G2E

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices ne sont pas autorisées pour cette épreuve.

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.

Si, au cours de l'épreuve, le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.

Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas.

PROBLEME 1

1.1. Question préliminaire

Soit φ une fonction définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On veut montrer l'équivalence :
$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y) \quad \Leftrightarrow \quad$ Il existe un réel a tel que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi(x)=e^{ax}$.

Pour cela, on pourra considérer, pour y réel quelconque fixé, la fonction φ_y définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi_y(x)=\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)$, dériver φ_y et montrer que φ est l'unique solution de l'équation différentielle de fonction inconnue z : $\forall y\in\mathbb{R}$, $z'(y)=\varphi'(0)z(y)$ et $z(0)=1$.
Conclure.

On considère l'ensemble E des matrices $M(x)=\begin{pmatrix} f(x) & h(x) \\ g(x) & k(x) \end{pmatrix}$ où f, g, h et k sont des fonctions de la variable x, définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifiant pour tous réels x et y :

$$\text{(P1)} \quad M(x+y)=M(x)M(y).$$

1.2. On suppose que g et h sont nulles. Que peut-on dire de f et k ?

On suppose, dans la suite du problème, que g et h ne sont pas les fonctions nulles.

1.3. Soit $x\in\mathbb{R}$ et $\lambda(x)$ une valeur propre réelle ou complexe de $M(x)$. On suppose que la dimension du sous-espace propre associée à $\lambda(x)$ est égale à 1. Montrer que pour tout réel y, les vecteurs propres de M(x) sont vecteurs propres de M(y). (On pourra utiliser la commutativité de $M(x)$ et $M(y)$, c'est-à-dire que $M(y)M(x)=M(x)M(y)$).

1.4. En utilisant la commutativité des matrices de E, montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$, il existe des constantes a, b, c et des fonctions F et G telles que, $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$M(x)=F(x)\,I_2+G(x)\begin{pmatrix}-a & c\\ b & a\end{pmatrix} \text{ où } I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

1.5. On suppose dans cette question que $\forall x\in\mathbb{R}$, M(x) est diagonalisable (éventuellement dans $\mathbb{C}$).

1.5.1. Justifier que les valeurs propres de M(x) sont distinctes.

1.5.2. Montrer qu'il existe une matrice inversible P (que l'on ne cherchera pas à calculer) telle que :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $M(x) = P\begin{pmatrix}e^{\alpha x} & 0\\ 0 & e^{\beta x}\end{pmatrix}P^{-1}$ où α et β sont des nombres réels ou complexes distincts.

1.6. Montrer que les matrices $\begin{pmatrix}-a & c\\ b & a\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ sont libres.

1.7. En utilisant la propriété (P1), exprimer pour tous réels x et y, F(x+y) et G(x+y) en fonction de F(x), G(x), F(y) et G(y).

1.8. On pose $\alpha^2=a^2+bc$, où α peut être réel ou complexe, et pour tout réel x, on pose : $A(x)=F(x)+\alpha G(x)$ et $B(x)=F(x)-\alpha G(x)$.

1.8.1. On suppose $\alpha\neq 0$.
Montrer que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a : A(x+y) = A(x).A(y) et que B(x+y) = B(x).B(y).
En déduire F(x) et G(x).

1.8.2. On suppose $\alpha=0$. Déterminer F(x) et G(x).

1.9. En déduire E.

1.10. Montrer, qu'à partir de cas particuliers, on peut retrouver les formules de trigonométrie donnant sin(x+y) et cos(x+y) en fonction de sin(x), sin(y), cos(x) et cos(y).

PROBLEME 2

Questions préliminaires :

2.1. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé (Ω,T,P), indépendantes, de densités respectives f et g et de fonctions de répartition respectives F et G.
On rappelle que, pour tout réel a non nul et tout réel b, une densité de a X+b est : $x\mapsto\frac{1}{|a|}f\left(\frac{x-b}{a}\right)$ et une densité de X+Y est ; $x\mapsto\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(x-t)dt$.

2.1.1. Déterminer une densité de la variable aléatoire Y-X.

2.1.2. Montrer que : $P(X\leq Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)\,g(t)\,dt$.

2.2. Le but de cette question est de montrer que : $\forall x\in\left]-1,1\right]$, $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=\ln(1+x)$.

2.2.1. Montrer que : $\forall x \in]-1,1]$ et $\forall N \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{N} (-t)^{n-1} \right) dt$.

2.2.2. Montrer que : $\forall x \in]-1,1]$, $\lim_{N \to +\infty} \int_0^x \frac{t^N}{1+t} dt = 0$.

2.2.3. Conclure.

2.2.4. Montrer que pour tout entier n non nul, on a : $\frac{1}{n+1} \le \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \le \frac{1}{n}$.

En déduire que $\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = +\infty$.

2.2.5. Montrer que : $\forall x \in [-1,1[$, $\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x)\ln(1-x)$.

Dans la suite du problème, on considère $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ avec λ>0.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t<0 \\ \alpha\ e^{-\alpha t} \text{ si } t \ge 0 \end{cases}$.

On note F la fonction de répartition associée.

2.3. Soit Z la variable aléatoire égale à $X_1 - X_2$.

2.3.1. Déterminer une densité de Z.

2.3.2. Calculer l'espérance de Z et la variance de Z.

2.3.3. Montrer que la loi de $|Z|$ est exponentielle.

2.3.4. Montrer que la loi de Z conditionnée par $(Z \ge 0)$ est exponentielle.

2.4. Soit m un entier naturel non nul fixé. On range les variables aléatoires $X_0, X_1, ..., X_m$ par ordre décroissant. On obtient une nouvelle suite de variables aléatoires $Y_0, Y_1, ..., Y_m$ avec $Y_0 \ge Y_1 \ge ... \ge Y_m$.

2.4.1. En remarquant que pour tout réel x, on a : $Y_0 \le x = \bigcap_{k=0}^{m} (X_k \le x)$, déterminer la fonction de répartition Φ_0 et une densité φ_0 de Y_0.

2.4.2. Déterminer la fonction de répartition Φ_m et une densité φ_m de Y_m.

2.4.3. Les variables aléatoires Y_0 et Y_m sont-elles indépendantes ?

2.5. Soit maintenant V la variable aléatoire égale au plus petit entier naturel n non nul tel que $X_n > X_0$.

2.5.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(V > n) = (\text{Max}(X_1, X_2, ..., X_n) \le X_0)$. En déduire $P(V > n)$.

2.5.2. Montrer que la loi de V est : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(V = n) = \frac{1}{n(n+1)}$.

2.5.3. La variable aléatoire V admet-elle une espérance ?

2.5.4. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(X_V \leq x / V = n)$.

2.5.5. Calculer la fonction de répartition Ψ et une densité ψ de X_V.

2.5.6. Calculer, si elles existent, l'espérance et la variance de X_V.

2.6. Soit p un réel appartenant à $[0,1]$ et q un entier naturel non nul. Soit R une variable aléatoire de loi binomiale B(q,p). On suppose que R et les variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendantes. Soit W la variable aléatoire définie par : $W = \begin{cases} X_0 \text{ si } R=0 \\ \operatorname{Max}(X_0, X_1, ..., X_R) \text{ si } R \neq 0 \end{cases}$. Déterminer la loi de W.

2.7. Soient m un entier naturel non nul fixé et k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq m$.

2.7.1. Pour tout x réel strictement positif, déterminer $P(X_k \leq x)$. On obtiendra une expression sous la forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer.

2.7.2. En déduire qu'une densité φ_k de Y_k est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$$\varphi_k(x) = \alpha(k+1)\binom{m+1}{k+1}\left(1\text{-}e^{-\alpha x}\right)^{m-k} e^{-\alpha(k+1)x}.$$

2.7.3. Les variables $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont-elles indépendantes ?