SESSION 2007

BANQUE D'EPREUVES G2E

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices ne sont pas autorisées pour cette épreuve.

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.

Si, au cours de l'épreuve, le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.

Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas.

PROBLEME 1

Une puce effectue des sauts aléatoires sur les trois sommets d'un triangle ABC. A chaque saut, elle peut soit sauter sur place, soit sauter vers un des deux autres sommets.
Les probabilités pour que le saut de départ s'effectue en A, B ou C sont respectivement a_0, b_0, c_0. On note A_n, respectivement B_n, C_n, les évènements : « après le n-ième saut, la puce est au point A, respectivement, B, C.» et a_n, b_n et c_n, leurs probabilités respectives.
Pour M et N appartenant à $\{A,B,C\}$, on note p_{MN} la probabilité pour que le saut s'effectue de M vers N.

1.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $a_{n+1} = p_{AA}\, a_n + p_{BA}\, b_n + p_{CA}\, c_n$. Exprimer de même b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. En déduire la matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

1.2 Soit $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. Pour M et N appartenant à $\{A,B,C\}$ avec $M \neq N$, on pose $p_{MN} = a$ et $p_{MM} = 1 - 2a$.

1.2.a. Ecrire la matrice M correspondant à ces valeurs et montrer que M admet 1 pour valeur propre. Déterminer l'espace propre associé et en donner une base.

1.2.b. Exprimer a_n en fonction de n.

1.2.c. En déduire la limite de chacune des suites $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$. Comment peut-on interpréter ce résultat ?

1.3 Dans cette question, on suppose que $p_{AA} = 1$, $p_{BA} = p_{BB} = \frac{1}{2}$ et $p_{CA} = p_{CB} = p_{CC} = \frac{1}{3}$.

1.3.a. Comment interprétez-vous la condition $p_{AA} = 1$?

1.3.b. Ecrire la matrice M associée à ces valeurs. Déterminer les valeurs propres de M, notées $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et telles que $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ et les vecteurs propres (u, v, w) associés respectivement à $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ admettant 1 pour première coordonnée.

1.3.c. On note P la matrice de (u, v, w). Calculer P^2 et en déduire P^{-1}.

1.3.d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer M^n. En déduire la probabilité pour qu'après le n-ième saut, la puce soit au point A. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$. Comment peut-on interpréter ce résultat ?

1.4 On revient au cas général. La puce fait un saut chaque seconde. Le résultat du premier saut a lieu à l'instant $t = 1$. Les sauts sont indépendants. Soit $\bar{p} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} a_k$ et pour $n \geq 1$, soit X_n la variable de Bernoulli qui vaut 1 si la puce est en A à l'instant n.

1.4.a. Donner l'espérance de X_n et sa variance.

1.4.b. Montrer que $\forall x \in [0,1]$, on a : $0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

1.4.c. Démontrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$, on a : $P\left(\left|\frac{X_n}{n} - \bar{p}\right| \geq \alpha\right) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$,

PROBLEME 2

Soient f la fonction de la variable réelle x définie par : $f : x \mapsto \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 2x$ et (C) sa courbe représentative. Pour tout entier naturel n, non nul, soit $\varphi_n : x \mapsto x^n e^{-x}$.

2.1 Etudier le signe de f(x) sur $]0,1[$.

2.2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,n[$, exprimer $\ln\left(\frac{\varphi_n(n+x)}{\varphi_n(n-x)}\right)$ grâce à la fonction f. En déduire que pour tout $x \in]0,n]$, $\varphi_n(n+x) > \varphi_n(n-x)$.

2.3 Montrer que $\int_0^n \varphi_n(x)dx = \int_0^n \varphi_n(n-u)du$. Etablir une relation analogue avec $\int_n^{2n} \varphi_n(x)dx$.

En déduire que $\int_0^n \varphi_n(x)dx < \int_0^{2n} \varphi_n(x)dx$.

2.4 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\int_0^x \varphi_n(t)dt = n!\left(1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)$.

2.5 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} x^n\ e^{-x}\ dx = n\,!$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} > \frac{e^n}{2}$.

2.6 On considère la suite de variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ obéissant à une même loi de Poisson de paramètre 1 et pour tout entier n, non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Quelle est la loi de S_n ? Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\left(e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}\right) = \frac{1}{2}$.

PROBLEME 3

Partie 1

On appelle sinus hyperbolique, notée sh, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \text{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

De même, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction cosinus hyperbolique par $x \mapsto \text{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et la fonction tangente hyperbolique par $x \mapsto \text{th}x = \frac{\text{sh}x}{\text{ch}x}$.

3.1.1 a) Etudier rapidement et représenter graphiquement les fonctions sh et ch.

b) Donner une expression simple de $\text{ch}^2x - \text{sh}^2x$ où x est un réel quelconque.

c) Montrer les égalités suivantes, pour tous réels x et y :

ch (x+y) = chx chy+shx shy

sh (x+y) = chx shy+shx chy

d) Exprimer, pour tous réels x et y, th(x+y) en fonction de th x et th y.

3.1.2 a) Calculer la dérivée de la fonction th en fonction de th.

b) Etablir les variations de la fonction th.

c) En déduire que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I que l'on précisera.

Dans les questions qui suivent, on notera Argth (argument tangente hyperbolique) la réciproque de th définie sur I.

3.1.3 Montrer que Argth est impaire.

3.1.4 Montrer que Argth est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

3.1.5 Pour tout x de I, on pose : y = Argthx. Exprimer x en fonction de y et retrouver le résultat de la question précédente.

Partie 2

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X telle que :

$$F_X(t) = 0 \text{ si } t < -1$$
$$F_X(t) = \frac{t+1}{2} \text{ si } t \in [-1, +1]$$
$$F_X(t) = 1 \text{ si } t > 1$$

3.2.1 Tracer le graphe de F_X ainsi que celui de la densité de X.

Dans la suite, α désigne un réel non nul.

3.2.2 Calculer $E(e^{\alpha X})$.

3.2.3 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \operatorname{ch} x = \dfrac{\operatorname{sh}(2x)}{2 \operatorname{sh} x}$.

3.2.4 Montrer par récurrence sur l'entier n que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)\right) = \ln\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2^n \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}\right)$.

3.2.5 Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de sh u pour u au voisinage de 0. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)\right)$ en fonction de α.

Soit $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi : $P[X_i = 1] = P[X_i = -1] = \dfrac{1}{2}$ pour tout entier i.

Pour tout entier n, on définit la variable aléatoire S_n par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k}$.

3.2.6 Calculer $E\left[e^{\alpha S_n}\right]$.

3.2.7 Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{X_k}{2^k}$. On note S sa somme que l'on ne cherche pas à calculer.

3.2.8 On admet que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E\left[e^{\alpha S_n}\right] = E\left[e^{\alpha S}\right]$. Comparer $E\left[e^{\alpha X}\right]$ et $E\left[e^{\alpha S}\right]$.

Partie 3

Soit E = $\{M(a,b) = \begin{pmatrix} \text{ch}a & \frac{1}{b}\text{sh}a \\ b\,\text{sh}a & \text{ch}a \end{pmatrix}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\}$.

3.3.1 Montrer que tout élément de E est inversible et que son inverse est dans E.

3.3.2 A quelle condition le produit de deux matrices de E est-il dans E ?

3.3.3 En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de $[M(a,b)]^n$. Cette expression est-elle valable pour n entier négatif ? Justifier.

3.3.4 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$. Déterminer les valeurs propres de M(a,b) ainsi qu'une base des sous-espaces propres associés. La matrice M(a,b) est-elle diagonalisable ? Justifier.

3.3.5 Déterminer une matrice diagonale $D_{a,b}$ et une matrice inversible $P_{a,b}$ telles que : $M(a,b) = P_{a,b}\, D_{a,b}\, P_{a,b}^{-1}$ et retrouver le résultat de la question 3.3.3.