SESSION 2006

BANQUE D'EPREUVES G2E

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices ne sont pas autorisées pour cette épreuve.

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.

Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas.

PROBLEME N° 1

I. Dans cette partie on désigne par V une fonction réelle de deux variables réelles positives x et y de la forme

$$V(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) \ ,$$

où φ et ψ sont deux fonctions dérivables sur $\left]0,+\infty\right[$.

I.1. Expliciter la relation

$$\text{(E)} \qquad x(1-y)\,\frac{\partial V}{\partial x} = y(1-x)\,\frac{\partial V}{\partial y}$$

où $\dfrac{\partial V}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial V}{\partial y}$ désignent les dérivées partielles de V, à l'aide des dérivées de φ et ψ.

I.2. Déterminer deux fonctions φ et ψ telles que V soit solution de (E).

II. On considère le système des deux équations différentielles

$$\text{(S)} \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - xy \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -y + xy \end{cases}$$

où x et y sont deux fonctions inconnues de la variable réelle t, de dérivées $\dfrac{dx}{dt}$ et $\dfrac{dy}{dt}$.

II.1. Montrer que pour tout T réel, si x et y vérifient (S), alors les fonctions $t \mapsto x(t+T)$ et $t \mapsto y(t+T)$ vérifient aussi (S).

II.2. Montrer que si V satisfait à (E), et si x et y vérifient (S) sur $\mathbb{R}$, alors la fonction composée $t \mapsto V(x(t),y(t))$ est constante.

III. On considère dans cette partie la fonction V définie pour x et y positifs par

$$V(x,y) = \ln(xy) - (x+y) \ .$$

III.1. Montrer que V possède des dérivées partielles d'ordre 2, et calculer-les.

III.2. Montrer que V ne peut posséder d'extremum qu'en un seul point, que l'on déterminera.

III.3. Montrer que V atteint un maximum strict au point trouvé.

III.4. Dessiner l'allure de la surface d'équation cartésienne $z = V(x,y)$.

IV. On désigne par X et Y la solution de (S) qui vérifie la condition initiale $X(0) = 2$, $Y(0) = 1$ (on admet l'existence et l'unicité de cette solution sur $\mathbb{R}$, et que $X(t)$ et $Y(t)$ prennent des valeurs positives).

IV.1. Montrer que, pour tout t réel,

$$\frac{e^{X(t)}}{X(t)} = KY(t)e^{-Y(t)} \ ,$$

où K est une constante qu'on déterminera.

IV.2. A partir du tracé du graphe de la fonction f définie sur $]\,0,+\infty\,[$ par $f(u) = \dfrac{e^u}{u}$, établir les points suivantes :

IV.2.1. Il existe un nombre $0 < \lambda < 1$ tel que, pour tout t réel,

$$\lambda \leq X(t) \leq 2 \quad \text{et} \quad \lambda \leq Y(t) \leq 2 \ .$$

IV.2.2. Etant donné x tel que $\lambda < x < 2$, l'équation en y

$$Kye^{-y} = \frac{e^x}{x}$$

possède exactement deux solutions positives comprises entre λ et 2.

IV.2.3. Si le couple (x,y) vérifie l'équation

$$Kye^{-y} = \frac{e^x}{x}$$

il en est de même du couple (y,x)

IV.2.4. Si t est tel que $X(t) = 2$, ou $X(t) = \lambda$, alors on a $Y(t) = 1$, $\dot{X}(t) = 0$ et $\dot{Y}(t) \neq 0$.

IV.3. Tracer l'allure de la courbe paramétrée $x = X(t), y = Y(t)$ (on prendra $\lambda = 0{,}4$).

IV.4. Montrer que les solutions X et Y sont périodiques de même période.

PROBLEME N$^{\text{o}}$ 2

I. Dans cette partie, on désigne par (X,Y) un couple de variables aléatoires qui prend ses valeurs dans le disque du plan centré à l'origine et de rayon unité, suivant une loi uniforme.

I.1. Déterminer la densité de la loi de (X,Y).

I.2. Déterminer la densité marginale de la variable aléatoire X, et dessiner son graphe.

I.3. Calculer l'espérance et la variance de X.

I.4. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $Z = X \cdot Y$.

I.5. Les variables aléatoires X et Y sont-elles corrélées? indépendantes?

II. Dans cette partie, X désigne une variable aléatoire à valeurs dans $[-1,1]$, de loi de densité $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$ pour $|x| < 1$.

Etant donné un nombre a de $[-1,1]$, on introduit la variable aléatoire $Z_a = |X - a|$ (distance entre a et X).

II.1. Calculer l'espérance de Z_a (on posera $a = \sin\alpha$).

II.2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $X \cdot Z_a$.

II.3. On étudie dans cette question les variations de la fonction φ, définie, pour $|\alpha| \leq \pi/2$ par

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{16}\sin 4\alpha - \frac{2}{3}\sin\alpha\cos^3\alpha\ .$$

II.3.1. Exprimer $\varphi'(\alpha)$ en fonction de $u = \cos\alpha$.

II.3.2. Donner le tableau de variation de φ, et tracer l'allure de son graphe.

II.4. Pour quelles valeurs de a les variables X et Z_a sont-elles non corrélées?

PROBLEME N$^{\text{o}}$ 3

I. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

I.1. Etudier le noyau de $A + I$ (où I désigne la matrice identité).

I.2. Déterminer les valeurs propres de A.

I.3. A est-elle diagonalisable ?

II. On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

II.1. Calculer B^2, B^3.

II.2. Calculer B^n pour $n \geq 2$.

III. Montrer que les matrices A et B sont semblables.

IV. Déterminer les suites (x_n), (y_n) et (z_n) telles que

$$x_0 = y_0 = z_0 = 1 \ ,$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = 3x_n + 8z_n \\ y_{n+1} = 3x_n - y_n + 6z_n \\ z_{n+1} = -2x_n - 5z_n \end{array} \right. .$$