SESSION 2005

BANQUE D'EPREUVES G2E

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices ne sont pas autorisées pour cette épreuve.

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.

Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas.

PROBLEME

1. On considère un triplet (ξ_1,ξ_2,ξ_3) de variables aléatoires réelles et centrées, auquel on associe la matrice (dite de covariance) Φ dont le coefficient de la ligne j et de la colonne k, pour j et k prenant les valeurs 1, 2 ou 3, s'écrit

$$\Phi_{jk} = \mathbb{E}(\xi_j\xi_k) \ ,$$

$\mathbb{E}$ désignant le symbole de l'espérance.

1.1. Expliquer pourquoi la matrice Φ est diagonalisable.

1.2. En développant $\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{3}\lambda_j\xi_j\right)^2\right]$ montrer que, pour tout triplet $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ de $\mathbb{R}^3$,

$$\sum_{1\leq j,k\leq 3}\Phi_{jk}\lambda_j\lambda_k \geq 0 \ .$$

1.3. Etablir de la même façon que $\sum_{1\leq j,k\leq 3}\Phi_{jk}\lambda_j\overline{\lambda_k} \geq 0$ pour tout triplet $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ de $\mathbb{C}^3$.

1.4. Montrer que les valeurs propres de la matrice Φ sont positives ou nulles.

2. On considère dans cette question la matrice $\Phi = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.1. Caractériser le noyau de Φ. Quel est le rang de Φ?

2.2. On suppose, dans cette question que le triplet de variables aléatoires réelles centrées (ξ_1,ξ_2,ξ_3) admette Φ comme matrice de covariance.

Calculer $\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{3}\xi_j\right)^2\right]$ et montrer que les variables aléatoires ne sauraient être indépendantes (au sens probabiliste).

2.3. Déterminer les valeurs propres de la matrice Φ.

2.4. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ qui soit formée de vecteurs propres de Φ.

2.5. En notant par X le vecteur colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, que devient l'équation $X^T \cdot \Phi \cdot X = 1$ (où X^T désigne le vecteur ligne $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$) dans la base déterminée en 2.4.?

2.6. En déduire la nature géométrique de l'ensemble

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \Phi \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1\} .$$

3. Outre le triplet (ξ_1,ξ_2,ξ_3) envisagé en 1. on considère une nouvelle variable aléatoire ξ réelle et centrée.

3.1. On définit une fonction F sur $\mathbb{R}^3$ en posant, pour tout triplet (h_1,h_2,h_3) de $\mathbb{R}^3$

$$F(h_1,h_2,h_3) = \mathbb{E}\left[\left(\xi - \sum_{j=1}^{3} h_j\xi_j\right)^2\right]$$

Donner l'expression développée de $F(h_1,h_2,h_3)$ en faisant intervenir les coefficients de la matrice Φ de covariance et les nombres $\mathbb{E}(\xi\xi_j)$ pour j valant 1, 2 ou 3.

3.2. Exprimer les dérivées partielles $\dfrac{\partial F}{\partial h_j}$ pour j valant 1, 2 ou 3.

3.3. Montrer que si la fonction F atteint un extremum au point (a,b,c) alors on a nécessairement

$$\Phi \cdot \begin{pmatrix} a \\ \\ b \\ \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(\xi\xi_1) \\ \\ \mathbb{E}(\xi\xi_2) \\ \\ \mathbb{E}(\xi\xi_3) \end{pmatrix} .$$

3.4. Montrer que si (a,b,c) est solution de l'équation précédente, alors F atteint effectivement un minimum absolu au point (a,b,c). (On développera $F(a+\alpha,b+\beta,c+\gamma) - F(a,b,c)$ pour montrer que cet accroissement est positif ou nul pour tout (α,β,γ) dans $\mathbb{R}^3$).

4. Dans cette question, on fait l'hypothèse que la matrice de covariance Φ est donnée par celle de la question 2.

4.1. Donner une condition nécessaire sur le second membre pour que le système linéaire

$$\Phi \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

possède une solution.

4.2. Sous la condition précédente, écrire la forme de la solution générale du système.

5. Outre le triplet (ξ_1,ξ_2,ξ_3), on considère un autre triplet $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ de variables aléatoires réelles centrées. On fait les hypothèses selon lesquelles

- les variables aléatoires $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ sont indépendantes entre elles
- les variables aléatoires $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ sont indépendantes des variables aléatoires (ξ_1,ξ_2,ξ_3)
- $\mathbb{E}(\omega_j^2) = \varepsilon^2$ pour $j = 1$, 2 ou 3 avec $\varepsilon > 0$ donné.

5.1. Ecrire la matrice de covariance du triplet $(\xi_1+\omega_1,\xi_2+\omega_2,\xi_3+\omega_3)$ à l'aide de la matrice de covariance Φ de (ξ_1,ξ_2,ξ_3) et de ε.

5.2. A toute matrice H carrée réelle de dimension 3, de coefficients h_{jk} pour j et k prenant les valeurs 1, 2, 3, on associe l'expression

$$G(H) = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{3}\left(\xi_j - \sum_{k=1}^{3} h_{jk}(\xi_k+\omega_k)\right)^2\right] .$$

On demande de développer $G(H)$ à l'aide des coefficients de Φ et de ε.

5.3. Montrer que si la fonction G (qui à H associe l'espérance $G(H)$ précédente) atteint un minimum pour $H = H_0$ alors, en désignant par I la matrice identité,

$$H_0 \cdot (\Phi + \varepsilon^2 I) = \Phi \ .$$

5.4. Expliquer pourquoi l'équation précédente possède une solution H_0 et une seule.

5.5. En développant $G(H_0 + \Delta) - G(H_0)$ où H_0 désigne la solution précédente et Δ une matrice carrée de dimension 3, montrer que G atteint effectivement un minimum absolu en H_0.

5.6. Exprimer H_0 lorsque Φ est la matrice de la question 2. et pour $\varepsilon = 1$.

EXERCICE

On considère le système d'équations différentielles

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y^2 \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = \sin x \end{cases}$$

où x et y désignent donc deux fonctions dérivables de la variable t.

1. Déterminer les solutions constantes de (1).

2. On considère une fonction V de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$: à quelle condition sur les dérivées partielles de V la fonction composée $t \mapsto V(x(t),y(t))$ est-elle constante lorsque x et y sont solutions de (1) ?

3. Vérifier que la fonction V définie par $V(x,y) = \cos x + \dfrac{y^3}{3}$ répond à la condition précédente.

4. On considère la solution de (1) qui obéit à la condition initiale

$$x(0) = 0 \ , \ y(0) = -\sqrt[3]{6} \ ,$$

et on note α,β cette solution : quelle relation existe-t-il entre α et β ?

5. Exprimer β en fonction de α dans la relation précédente, et tracer le graphe correspondant.