SESSION 2004

BANQUE D'EPREUVES G2E

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices ne sont pas autorisées pour cette épreuve.

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.

Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas.

Les trois problèmes sont indépendants et également cotés.

Problème 1

On désigne E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier ≥ 0, on désigne par E_n le sous-espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$.

On considère l'application f qui à $P \in E$ fait correspondre le polynôme

$$f(P)(x) = (2x+1).P(x) - (x^2-1).P'(x)$$

où P' est le polynôme dérivé de P.

1.1 Montrer que f est une application linéaire de E dans lui-même.

1.2. Identifier le noyau de f; on commencera par déterminer le degré d'un élément du noyau.

On considère la base canonique $(1, x, \ldots, x^n)$ de E_n.

1.3. Montrer que f définit aussi une application de E_2 dans lui-même. Ecrire la matrice de cette dernière.

1.4. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de cette matrice.

1.5. Pour λ réel fixé, on considère l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'(x) + (1 - \lambda + 2x)y(x) = 0 \ .$$

Déterminer la forme de la solution générale sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

1.6. Pour quelles valeurs de λ cette solution peut-elle être polynomiale?

1.7. Calculer la suite de vecteurs colonnes $(X_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et, pour $n \geq 0$, par

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X_n \ .$$

Problème 2

On considère le système d'équations différentielles

$$(1) \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + x^3 \end{cases}$$

où x et y sont deux fonctions dérivables de la variable réelle t, de dérivées respectives $\dfrac{dx}{dt}$ et $\dfrac{dy}{dt}$.

2.1. Identifier les solutions constantes de (1).

On considère maintenant la fonction V des variables réelles x et y définie par

$$V(x,y) = x^2 + y^2 - \frac{x^4}{2} \ .$$

2.2. Calculer les dérivées partielles de V et déterminer les points pour lesquels le gradient de V est nul.

2.3. Montrer que si x et y sont deux solutions de (1) sur $\mathbf{R}$, la fonction composée $t \mapsto V(x(t), y(t))$ de la variable t est constante.

2.4. Tracer le graphe de la fonction $\phi : x \mapsto x^2 - \dfrac{x^4}{2}$ de la variable x et en déduire le tracé de la ligne de niveau, ensemble des points (x,y) tels que

$$V(x,y) = 0 \ .$$

Pour cela on cherchera à exprimer y en fonction de x, en précisant le domaine de définition.

2.5. On considère la solution (x,y) de (1) qui obéit à la condition initiale $x(0) = 0$, $y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Préciser $V(x,y)$. Exprimer ensuite y en fonction de x.

2.6. Déterminer une primitive de $\dfrac{1}{x^2 - 1}$ sur $]-1,1[$, et en déduire la solution (x,y) définie en **2.5**. Tracer ensuite les graphes de x et de y.

Problème 3

On considère une variable aléatoire U de loi uniforme sur $]0,1[$ et une variable aléatoire X positive de loi de densité continue f; on suppose U et X indépendantes.

3.1. Si X suit la loi exponentielle de paramètre 1, calculer la probabilité

$$\mathbf{P}\big((U,X) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\big) \ .$$

On considère maintenant la variable aléatoire $Y = U.X$.

3.2. Montrer que l'application $\phi(u, x) = (y, x)$, où $y = ux$, des variables u, x, est une bijection de $]0, 1[\times]0, +\infty[$ sur un domaine de $\mathbf{R}^2$ que l'on précisera.

3.3. Déterminer la loi du couple (Y, X).

3.4. Montrer que la densité de Y est donnée par

$$g(y) = \int_0^1 f\left(\frac{y}{v}\right) \frac{dv}{v}$$

pour $y > 0$.

On pourra admettre cette dernière relation pour poursuivre le problème.

3.5. En déduire que $g(y)$ obéit à l'équation différentielle

$$y.g'(y) + f(y) = 0$$

sur $]0, +\infty[$.

3.6. Donner l'expression intégrale de $g(y)$ lorsque X suit la loi exponentielle de paramètre 1.

3.7. Montrer que $g(y) \sim -\ln(y)$ quand $y \to 0$ par valeurs > 0.