SESSION 2003

BANQUE D'EPREUVES G2E

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices ne sont pas autorisées pour cette épreuve.

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.

Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas.

Les opérations de dérivation sous le signe intégrale, d'interversion d'intégrales ou d'intégration terme à terme de séries seront effectuées sans justification. On admettra aussi la convergence des intégrales généralisées rencontrées.

Première partie, où l'on calcule les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{1+it} dt$ pour ω réel et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{(1+it)^n} dt$ pour n entier > 0.

1.1. Pour $T > 0$ fixé, on introduit la fonction

$$f_T(\omega) = \int_{-T}^{T} \frac{e^{i\omega t}}{1+it} dt$$

de la variable réelle ω.

1.1.1. Montrer que

$$f_T'(\omega) + f_T(\omega) = 2\frac{\sin(T\omega)}{\omega}$$

où f_T' est la dérivée de f_T.

1.1.2. Calculer la dérivée de la fonction $e^{\omega} f_T(\omega)$, et en déduire que

$$f_T(\omega) = 2\Big(\arctan T + \int_0^{\omega} e^{\theta} \frac{\sin(T\theta)}{\theta} d\theta\Big) \cdot e^{-\omega} \ .$$

1.1.3. Montrer à l'aide d'une intégration par parties et de majorations que pour $\omega > 0$ on a

$$\lim_{T \to +\infty} \int_0^{\omega} \frac{e^{\theta} - 1}{\theta} \sin(T\theta) d\theta = 0 \ .$$

1.1.4. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$. Calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(T\theta)}{\theta} d\theta$ selon le signe du paramètre réel T.

1.1.5. Déduire de ce qui précède que

$$\lim_{T \to +\infty} f_T(\omega) = 2\pi e^{-\omega}$$

pour $\omega > 0$.

1.1.6. Calculer cette limite pour $\omega < 0$ et donner le graphe de la fonction de la variable réelle ω ainsi obtenue.

1.2. Pour $T > 0$ et n entier > 0, on pose

$$I_n(T) = \int_{-T}^{T} \frac{e^{it}}{(1+it)^n} dt \ .$$

1.2.1. Etablir une relation entre $I_n(T)$ et $I_{n+1}(T)$ à l'aide d'une intégration par parties.

1.2.2. En déduire, à l'aide de 1.1.5., que $\lim_{T \to +\infty} I_n(T)$ existe pour chaque $n > 0$, et donner l'expression de cette limite, qu'on notera

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{(1+it)^n} dt \ .$$

Deuxième partie, où l'on résout une équation différentielle à l'aide d'une série et d'une intégrale.

2.1. On considère l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad t\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + tx(t) = 0 \ .$$

où t désigne la variable, x la fonction inconnue, de dérivée première $\dot{x}$ et seconde $\ddot{x}$.

2.1.1. Calculer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n} \ .$$

2.1.2. Montrer que sa somme $J_0(t)$ vérifie (E_0) et calculer $J_0(0)$ et $J_0'(0)$.

2.2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{it\sin\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \cos(t \sin\theta) d\theta$ pour t réel.

2.2.1. En développant la fonction cosinus en série entière, montrer que

$$J_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{it\sin\theta}d\theta \ .$$

On admettra que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2p}\theta d\theta = \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}$ pour tout entier p.

2.3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\theta}\theta^n d\theta = n!$ pour n entier ≥ 0.

2.3.1. Etablir, pour $\epsilon > 0$, la formule

$$\int_0^{+\infty} e^{-\epsilon t^2} t J_0(t)dt = \frac{1}{2\epsilon}e^{-1/4\epsilon}$$

à l'aide d'une intégration terme à terme.

On admettra pour la suite que cette formule reste vraie pour ϵ complexe à partie réelle > 0.

Troisième partie, où l'on résout de la même façon une autre équation différentielle.

3.1. Vérifier que $\displaystyle J_1(t) = \frac{t}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$ satisfait l'équation différentielle

$$(E_1) \qquad t^2\ddot{x}(t) + t\dot{x}(t) + (t^2-1)x(t) = 0$$

et les conditions initiales $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \frac{1}{2}$.

3.1.1. En développant en série $e^{-t^2/4(1+is)}$ et en intégrant terme à terme, montrer, à l'aide de 1.2.2., que

$$J_1(t) = \frac{t}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(1+is)-\frac{t^2}{4(1+is)}}\frac{ds}{(1+is)^2} \ .$$

3.2. Pour $a > 0$ et $b > 0$ distincts, établir

$$b\int_0^{+\infty} J_0(at)J_1(bt)dt = \begin{cases} 1 & \text{si } b > a \\ 0 & \text{si } b < a \end{cases} \ .$$

Quatrième partie, où l'on modélise un mouvement aléatoire plan.

Dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère trois barres de même longueur $a > 0$. Les angles sont mesurés dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$.

La première barre $\vec{OA_1}$ tourne librement autour de O , et θ_1 désigne l'angle $(\vec{i},\vec{OA_1})$. Le seconde $\vec{A_1A_2}$ tourne autour de A_1 et θ_2 désigne l'angle $(\vec{A_10},\vec{A_1A_2})$. Le troisième $\vec{A_2A_3}$ tourne autour de A_2 et θ_3 désigne l'angle $(\vec{A_2O},\vec{A_2A_3})$.

On fait l'hypothèse que θ_1, θ_2 et θ_3 sont trois variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $]-\pi,\pi]$.

4.1. Faire une figure.

4.1.1. Exprimer la distance OA_2 comme une fonction s_2 de θ_2, puis la distance OA_3 comme une fonction s_3 de θ_2 et θ_3.

4.2. Si u est une fonction réelle, expliquer pourquoi l'espérance de la variable aléatoire $X = u(s_3(\theta_2, \theta_3))$ est donnée par

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(s_3(\theta_2, \theta_3)) d\theta_2 d\theta_3 \ .$$

Cinquième partie, où l'on exprime la fonction de répartition de la distance s_3 de A_3 à l'origine à l'aide des fonctions introduites dans les parties 2 et 3.

5.1. Dans le plan $(0, \vec{i}, \vec{j})$ on considère deux points A et B tels que

$$\begin{array}{cc} (\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = \phi, & (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \psi \\ OA = \rho, & OB = R \end{array}$$

où ϕ, ψ, ρ, R sont donnés. On pose $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A0})$, $r = AB$.

5.1.1. Faire une figure.

5.1.2. Etablir la relation $R \sin(\phi + \psi) = \rho \sin \phi - r \sin(\phi - \theta)$.

5.2. Montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_0\big(\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\theta}\big) d\theta = J_0(r) J_0(\rho)$$

pour r et $\rho > 0$ donnés.

5.3. Montrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire s_3 est donnée par

$$\mathbf{P}(s_3 \leq r) = r \int_0^{+\infty} J_1(rt) J_0(at)^3 dt$$

pour tout $r > 0$.