BANQUE D'EPREUVES G2E

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Note importante: il sera tenu le plus grand compte des qualités de soin et de rédaction apportées par les candidats.

Problème 1 (8 points)

On considère une suite de variables aléatoires $(\xi_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ avec les propriétés qui suivent.

La loi de ξ_0 est donnée par

$$\mathbf{P}(\xi_0 = j) = p_j^0$$

pour $j = 1, 2, 3, 4$, où les p_j^0 sont précisés par la suite.

Pour chaque $n \geq 0$, on se donne les probabilités conditionnelles

$$\mathbf{P}(\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = k) = p_{jk}$$

pour j, k prenant les valeurs $1, 2, 3, 4$, où la matrice p_{jk} vaut

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dans toute la suite.

Ainsi, par exemple $\mathbf{P}(\xi_{n+1} = 1 \mid \xi_n = 3) = 1/2$.

1. La loi de ξ_0 étant donnée par la table

ξ_0	1	2	3	4
P	1/4	0	1/2	1/4

dresser celle de ξ_1, puis celle de ξ_2.

2. Montrer que 0 et 1 sont valeurs propres de la matrice P et préciser les sous-espaces propres correspondants en donnant une base de chacun d'eux.

3. Quelle doit être la loi de ξ_0 pour que les ξ_n aient toutes la même loi?

4. Montrer que P est diagonalisable sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes.

5. Montrer que pour tout n entier positif, la puissance n-ème de P prend la forme

$$P^n = A + \omega^n B + \omega^{2n} C$$

où l'on a posé $\omega = e^{2i\pi/3}$ et où les matrices A, B, C ne dépendant pas de n. On demande d'expliciter les matrices A, B et C.

6. Etudier le comportement de la suite de variables aléatoires $(\xi_n)_{n\geq 1}$ lorsque la loi de ξ_0 est donnée par la table de la question **1**.

Problème 2 (12 points)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs a et b.

1. Calculer la fonction génératrice de X; en déduire l'espérance et la variance de X.

2. Identifier la loi de la variable aléatoire $X + Y$.

3. Exprimer la probabilité de l'événement $(X = Y)$ comme la somme d'une série numérique.

4. Faire de même pour l'événement $(|X - Y| = k)$ où k est un nombre entier positif donné.

On considère l'équation différentielle

$$xy'' + y' - xy = 0$$

et on cherche la solution y de cette équation qui vérifie la condition initiale $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

5. Chercher y comme somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

d'une série entière, en montrant d'abord que les coefficients vérifient l'équation de récurrence

$$(n+1)^2 a_{n+1} = a_{n-1}$$

pour $n \geq 1$. On demande de préciser le rayon de convergence de la série obtenue.

6. On définit une fonction I par l'expression intégrale

$$I(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t \ .$$

Montrer que I possède les propriétés exigées pour y. On pourra dériver sous le signe intégrale, puis intégrer par parties.

7. En développant e^{-tx} en série, puis en intégrant terme à terme, montrer directement que les fonctions y et I coïncident. On pourra utiliser la formule

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

pour n entier positif.

8. Montrer que

a) $\quad \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t < \frac{1}{2} \quad$ si $x > 0$,

b) $\quad 0 < \dfrac{1}{\sqrt{1-y}} - 1 < y \quad$ si $0 < y < 1/2$.

9. Montrer que

a) $\quad \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t \sim \sqrt{\frac{\pi}{x}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b) $\quad \displaystyle\int_0^1 e^{-tx}\sqrt{t}\, \mathrm{d}t < \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{x^{3/2}}$ pour $x > 0$.

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\theta^2} \mathrm{d}\theta = \sqrt{\pi}$.

10. Montrer que

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t = \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-\theta x}}{\sqrt{\theta(1-\theta/2)}} \, \mathrm{d}\theta$$

et déduire de ce qui précède que $I(x) \sim e^x/\sqrt{2\pi x}$ lorsque x tend vers l'infini.

11. Donner un équivalent à la probabilité de l'événement $(X = Y)$ lorsque X et Y suivent une loi de Poisson de même paramètre a tendant vers l'infini.