

Copie anonyme - n°anonymat : 184022

Z2-00002
184022
Mat Appli



Code épreuve : 298

Nombre de pages : 19

Session : 2024

Épreuve de : Maths appliquées EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1

1) a) Soit $u \in [0, 1]$,

$$\frac{a}{2-u} + \frac{b}{2+u} = \frac{a(2+u) + b(2-u)}{(2-u)(2+u)} = \frac{2a+au+2b-bu}{4-u^2} = \frac{(a-b)u + 2a+2b}{4-u^2}$$

$$\text{or } \frac{(a-b)u + 2a+2b}{4-u^2} = \frac{1}{4-u^2} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} a-b=0 \\ 2a+2b=1 \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} a=b \\ 4a=1 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} a=b \\ a=b=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$b) u_0 = \int_0^1 \frac{1}{4-u^2} du = \int_0^1 \frac{1}{4(2-u)} du + \int_0^1 \frac{1}{4(2+u)} du$$

(relation de Chasles)

$$= \frac{1}{4} [-\ln|2-u|]_0^1 + \frac{1}{4} [\ln|2+u|]_0^1$$

$$= +\frac{1}{4} \ln(2) + \frac{1}{4} \ln(3) - \frac{1}{4} \ln(2)$$

$$= \frac{1}{4} \ln(3)$$

3)a) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$4u_n - u_{n+2} = 4 \int_0^1 \frac{u^n}{4-u^2} du - \int_0^1 \frac{u^{n+2}}{4-u^2} du$$

$$= \int_0^1 \frac{u^n (4-u^2)}{4-u^2} du = \int_0^1 u^n du = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

(Rozier)

$$= \frac{1}{n+1}$$

b)

def suite (n) =

if $(-1)^n \neq 1$ =

$$u = np - \log(3) / 4$$

for k in range $(2, n+1, 2)$ =

$$u = 4 * u - 1 / (n+1)$$

calcul des termes pairs

else =

$$u = np - \log(2 / np - \log(3))$$

for k in range $(3, n+1, 2)$ =

$$u = 4 * u - 1 / (n+1)$$

return u

4)a) $u \in [0; 1]$ Donc $0 \leq u^2 \leq 1$

$$\Leftrightarrow -1 \leq -u^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4-1 \leq 4-u^2 \leq 4$$

(On multiplie par l'inverse) $\Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4-u^2} \leq \frac{1}{3}$

(On multiplie par $u^n \geq 0$) $\Leftrightarrow \frac{u^n}{4} \leq \frac{u^n}{4-u^2} \leq \frac{u^n}{3}$

D'où par positivité de l'intégrale
($1 > 0$)

$$\frac{1}{4} \int_0^1 x^n dx \leq u_n \leq \frac{1}{3} \int_0^1 x^n dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{3(n+1)}$$

(calcul fait avant)

b) D'après le théorème d'encadrement

$$\text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3(n+1)} = 0$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
Ainsi, (u_n) converge vers 0.

c) D'après l'inégalité précédente, $\frac{1}{4(n+1)} \leq u_n$

$$\text{Donc on a } \frac{1}{4(n+1)} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4 \cdot n}$$

et l'on sait que $\sum \left(\frac{1}{n}\right) \times \frac{1}{4}$ diverge

or comme (u_n) est une suite de termes positifs.

on a $\sum u_n$ qui est supérieure ou égale à une série divergente.

Donc

(u_n) diverge d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.

— la série de terme général

de comparaison pour les séries à

termes positifs

5) a) D'après le graphique

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n u_n = 1$$

$$\bullet \bullet \text{ donc } u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx$$

$$\text{On pose } \begin{cases} u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ v'(x) = x^n \end{cases} \quad \begin{cases} v(x) = (4-x^2)^{-1} \\ v'(x) = -1 \times -2x \times (4-x^2)^{-2} \\ = 2x \times \frac{1}{(4-x^2)^2} \end{cases}$$

u, v sont de classe C^1 sur $[0, 1]$

$$u_n = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(4-x^2)} \right]_0^1 - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$$

$$= \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$$

$$\text{c) D'après 4(a) } \frac{1}{4(n+1)} - \frac{1}{3(n+1)} \leq -\frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3(n+1)} - \frac{1}{4(n+1)} \geq \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{2} \times \left(\frac{1}{3(n+1)} - \frac{1}{4(n+1)} \right) \geq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \geq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx \geq 0$$

Copie anonyme - n°anonymat : 184022

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 19

Session : 2024

Épreuve de : Maths Appliquées EPHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

De la même manière que précédemment

$$0 \leq u \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq u^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq -u^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \leq 4 - u^2 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow 9 \leq (4 - u^2)^2 \leq 16 \quad (\text{par } \uparrow) \text{ de la fonction carrée}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{16} \leq \frac{1}{(4 - u^2)^2} \leq \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{u^{n+2}}{16} \leq \frac{u^{n+2}}{(4 - u^2)^2} \leq \frac{u^{n+2}}{9}$$

$$\text{Ainsi } \int_0^1 \frac{u^{n+2}}{16} du = \frac{1}{16} \int_0^1 u^{n+2} du = \frac{1}{16} \times \frac{1}{(n+3)} = \frac{1}{16(n+3)}$$

$$\text{et } \int_0^1 \frac{u^{n+2}}{9} du = \frac{1}{9(n+3)}$$

D'où par positivité de l'intégrale on a

$$\frac{1}{16(n+3)} \leq \int_0^1 \frac{u^{n+2}}{(4 - u^2)^2} du \leq \frac{1}{9(n+3)}$$

$$\text{Par théorème d'encadrement, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{u^{n+2}}{(4 - u^2)^2} du = 0$$

$$d) \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{u^{n+2}}{|4-u^2|^2} du$$

$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$$\text{Donc } v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$$

Exercice 2

$$\forall x \quad f(x) = 0 \text{ si } x < 0$$

$$f(x) = x e^{-x^2/2} \text{ si } x \geq 0$$

$$\bullet \text{ Donc } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$$

... f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0,
comme produit de fonctions continues.

$$\bullet \bullet \bullet \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0 + \int_0^{+\infty} x e^{-x^2/2} dx$$

Sous réserve d'existence

On pose $A > 0$.

$$\int_0^A x e^{-x^2/2} dx = - \left[e^{-x^2/2} \right]_0^A = -e^{-\frac{A^2}{2}} + 1$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} -e^{-\frac{A^2}{2}} = 0 \quad \text{D'où } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

bilan = $\int$ peut être une dérivée d'une certaine var X .

b) Soit $X' \hookrightarrow N(0, 1)$

$$V(X') = 1 = E(X'^2) - (E(X'))^2 = E(X'^2) = 1.$$

c) la fonction $u \mapsto u^2 e^{-u^2/2}$ est paire sur $\mathbb{R}$.

$E(X)$ existe si $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f(u) du$ converge absolument.

$$\text{Or, nous réécrivons d'existence } E(X) = 0 + \int_0^{+\infty} u^2 f(u) du \\ = \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u^2/2} du$$

$$\text{Par parité on a } E(X) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-u^2/2} du$$

$$\text{Or on sait que } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-u^2/2} du = 1$$

$$\text{Donc } \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}$$

D'où $E(X)$ existe

$$\text{et } E(X) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

2) $F_X(u) = P(X \leq u)$.

• Soit $u < 0$

$$F_X(u) = P(X \leq u) = \int_{-\infty}^u f(t) dt = 0.$$

• Soit $u \geq 0$

$$F_X(u) = P(X \leq u) = 0 + \int_0^u f(t) dt = 1 - e^{-t^2/2} \Big|_0^u$$

$$= -e^{-u^2/2} + 1 = 1 - e^{-\frac{u^2}{2}}$$

3) a) $Z = X^2$

Soit $u < 0$

$$F_Z(u) = P(Z \leq u) = P(X^2 \leq u) \\ = P(X \leq \sqrt{u}) = 0.$$

Soit $u \geq 0$

$$F_Z(u) = P(Z \leq u) = P(X^2 \leq u) \\ = P(X \leq \sqrt{u}) = \int_{-\infty}^{\sqrt{u}} f(x) dx = \int_0^{\sqrt{u}} f(x) dx \\ = 1 - e^{-\frac{u}{2}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{d'après le calcul qui précède} \\ \text{car } (\sqrt{u})^2 = u \text{ (ici)} \end{array} \right)$$

Donc $Z \hookrightarrow E\left(\frac{1}{2}\right)$

b) ←

```
def simulX():
    z = rd.exponential(2)
    u = np.sqrt(z)
    return u
```

} import numpy as np
import numpy.random as rd

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

a) $G_n(u) = P(Y_n \leq u) = P(X \leq u\sqrt{n})$

• $\forall u < 0 \quad u\sqrt{n} < 0$
donc $G_n(u) = 0$

• $\forall u \geq 0 \quad P(X \leq u\sqrt{n}) = 1 - e^{-\frac{(u\sqrt{n})^2}{2}} = 1 - e^{-\frac{nu^2}{2}}$

Copie anonyme - n°anonymat : 184022

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 19

Session : 2024

Épreuve de : Maths appliquées EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

b) Pour calculer la convergence en loi, on calcule la limite de la fonction de répartition

$$\forall u \geq 0 \quad G_n(u) = 1 - e^{-\frac{nu^2}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Donc $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L} Y$ avec Y la var certaine.

$$c). E(Y_n) = E\left(\frac{X}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} E(X) = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2n}$$

$$V(Y_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 V(X) = \frac{1}{n} V(X)$$

c) Soit $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} P(|Y_n| > \varepsilon) &= 1 - P(|Y_n| \leq \varepsilon) \\ &= 1 - P(-\varepsilon \leq Y_n \leq \varepsilon) \\ &= 1 - G_n(\varepsilon) + \underbrace{G_n(-\varepsilon)}_{=0} \end{aligned}$$

$$= 1 - G_n(\varepsilon) = 1 - 1 + e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

S) $M_n = \min(X_1, \dots, X_n)$

a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $P(M_n > x) = P\left(\bigcap_{i=1}^n X_i > x\right)$

or les $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^+}$ sont mutuellement indépendants.

$$\text{donc } P(M_n > u) = \prod_{k=1}^n P(X_k > u)$$

$$= \prod_{k=1}^n (1 - F_X(u)) = (1 - F_X(u))^n$$

$$\forall u \geq 0 \\ = (e^{-\frac{u^2}{2}})^n = e^{-nu^2/2}$$

$$\forall u < 0 \quad P(M_n > u) = 1 \\ \text{et } P(M_n \leq u) = 0$$

$$\text{D'où } P(M_n \leq u) = 1 - P(M_n > u) = 1 - e^{-nu^2/2} \\ \forall u \geq 0$$

et M_n suit la même loi que Y_n .

b)

def simul M(n) =

$X = \text{np.array}([\text{simul } X() \text{ for } k \text{ in range}(n)])$

$M = X + \text{np.sqrt}(1 / \text{np.sqrt}(n))$

return M

Exercice 3

$$1) \forall u \in \mathbb{R}, f(u) = 1 + \int_0^u t f(u-t) dt$$

$$\text{On pose } v = u - t \text{ donc } \frac{dv}{dt} = -1 \\ \text{et } dv = -dt$$

$$\text{Donc } t = u \Rightarrow v = 0$$

$$\text{et } t = 0 \Rightarrow v = u$$

$$\text{Ainsi } \forall u \in \mathbb{R}, f(u) = 1 + \int_u^0 (u-v) f(v) dv = 1 + \int_0^u (u-v) f(v) dv$$

Ainsi, les deux égalités sont bien équivalentes.

2). Si f est solution de ce problème
alors $1 + \int_0^u (u-v) f(v) dv$ est solution du problème.
continue sur $\mathbb{R}$.

$g = u \mapsto (u-v) f(v)$ est donc continue sur $\mathbb{R}$
et y admet des primitives.

donc $f(u) = G(u) - G(0) + 1$
en notant G une primitive de g .

alors f est dérivable de dérivée continue
donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Soit $u \in \mathbb{R}$

$$f(u) = 1 + \int_0^u f(v) dv - \int_0^u v f(v) dv \quad \text{d'après Charles.}$$

On pose $z : u \mapsto u f(v)$
et on note Z une primitive de z

$$\text{Ainsi } f(u) = 1 + u (F(u) - F(0)) - Z(u) + Z(0)$$

(en notant F primitive de f)

f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc dérivable et

$$f'(u) = F(u) + u f(u) - F(0) - Z(u) + Z(0)$$

$$= F(u) + u f(u) - F(0) - u f(u)$$

$$= F(u) - F(0) = \int_0^u f(v) dv$$

b) Soit $u \in \mathbb{R}$

$$g'(u) = F(u) - F(0)$$

somme de fonctions de classe C^1 car leurs dérivées sont continues

donc g' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$
et g de classe C^2 sur $\mathbb{R}$

$$\bullet \quad g''(u) = g(u). \quad (\text{d'après ce qui précède})$$

c) On note l'équation caractéristique (E)

$$u^2 = 1$$

$$(\Leftrightarrow) \quad (u-1)(u+1) = 0$$

$$(\Leftrightarrow) \quad u = 1 \text{ ou } u = -1$$

Ainsi il existe des p 2 réels tels que

$$\bullet \quad g(u) = \lambda e^u + \mu e^{-u}$$

$$\text{or } g(0) = 1 + \int_0^0 t g(u-t) dt = 1$$

$$\text{Donc } \lambda e^0 + \mu e^{-0} = 1$$

$$\bullet \text{ or } g'(0) = 0$$

$$\text{donc } \lambda e^0 - \mu e^{-0} = 0$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \text{et } \lambda = \mu \end{cases}$$

$$\text{donc } \lambda = \mu = \frac{1}{2}$$

$$\text{et } \forall u \in \mathbb{R} \quad g(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \text{ est une solution}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 184022

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 19

Session : 2024

Épreuve de : Maths appliquées E0HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

3) Elle Le problème de Cauchy posé à la question 2)d) assure que la fonction trouvée est la seule solution.

4) Soit $u \in \mathbb{R}$

$f(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$ est la seule solution du problème initial.

donc $f(u) - 1 = \frac{e^u + e^{-u}}{2} - 1$ est la seule solution au problème demandé.

car en posant $g(u) = f(u) - 1$

$$\text{on a } g'(u) = f'(u) = \int_0^u f(u) du = \int_0^u (g(u) + 1) du$$

$$\text{et on a } g''(u) = f''(u) = f(u) = g(u) + 1$$

Problème

1)a) $a_0 = P(X_0 = 0) = 0$ car à l'instant initial, il y a une boule blanche dans A.

donc $b_0 = P(X_0 = 1) = 1$

et $c_0 = P(X_0 = 2) = 0$

b) ~~$P(X_1 = 0)$~~

On note $B_{A,i}$ la boule blanche (resp. de la B) l'urne A_i au i -ème tirage n

- B_B ou _____ de l'une B →

$$\bullet P(X_1=1) = P(B_{A,1} \cap B_{B,1}) + P(\overline{B_{A,1}} \cap \overline{B_{B,1}}) = \frac{1}{2}$$

$$\bullet P(X_1 = 2) = P(\overline{B_{A,1}} \cap B_{B,1}) = \frac{1}{4}$$

$$P(X_1 = 0) = P(B_{A,1} \cap \overline{B_{B,1}}) = \frac{1}{4}$$

D'où $a_1 = \frac{1}{4}$ $b_1 = \frac{1}{2}$ $c_1 = \frac{1}{4}$

c) Sei $n \geq 1$

$$X_n(\omega) = \{0, 1, 2\}$$

- car on fait des échanges de boules, on n'en rajoute pas. Il y a donc toujours soit 0 boules blanches dans A car 2 noirs.

1 boule blanche dans A et 1 noire

2 boules blanches dans A et 0 noire

Done. $(X_n=0) \cup (X_n=1) \cup (X_n=2) = \Omega$

- De plus, $(X_n=0) \cap (X_n=1) = (X_n=1) \cap (X_n=2) = (X_n=0) \cap (X_n=2) = \emptyset$

Donc, $\{(X_n=0), (X_n=1), (X_n=2)\}$ est un SCE.

da) Sei $n \in \mathbb{N}$

$$a_n + b_n + c_n = 1$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^+$

a) • $P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0) = 0$ car une des boules blanches de B va forcément revenir dans A.

• $P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1) = 1$

• $P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=2) = 0$ car lors du $(n+1)^{\text{e}}$ tirage il restera 1 boule noire dans A comme il y en avait _{en} 2.

• $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0) = P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2) = \frac{1}{4}$

• $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) = \frac{1}{2}$ (car on revient à l'état initial pour lesquels on a déjà calculé les probabilités).

• $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0) = 0 = P_{(X_{n+1}=2)}(X_{n+1}=2)$

car s'il y a 2 boules blanches dans A au moment n , une va être échangée et il en restera 1 seule.

• $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1) = 1$

b) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $(X_n=0) (X_n=1) (X_n=2)$ est un SCE

D'après la formule des probas totales

$$a_{n+1} = P(X_{n+1}=0) = P(X_n=0) P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0)$$

$$+ P(X_n=1) P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0) + P(X_n=2) P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0)$$

$$= a_n \times 0 + b_n \frac{1}{4} + c_n \times 0 = \frac{1}{4} b_n$$

$$b_{n+1} = P(X_{n+1}=1) = a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n$$

(selon les calculs de la page d'avant)

$$c_{n+1} = P(X_{n+1}=2) = \frac{1}{4} b_n$$

3) Soit $n=0$

$$\bullet a_1 = \frac{1}{4} = \frac{1}{4} b_0$$

$$\bullet c_1 = \frac{1}{4} = \frac{1}{4} b_0$$

$$\bullet b_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} b_0$$

les calculs sont bien vérifiés.

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $E(X_{n+1}) = 1 \cdot P(X_{n+1}=1) + 2 \cdot P(X_{n+1}=2)$

$$= b_{n+1} + 2c_{n+1}$$

b) On sait que $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = 1$

$$\text{or } c_{n+1} = a_{n+1}$$

$$\text{donc } b_{n+1} + 2c_{n+1} = 1$$

De la même manière $E(X_n) = b_n + 2c_n$

$$\text{Or } \forall n \in \mathbb{N} \quad c_{n+1} = \frac{1}{4} b_n \quad \text{donc } c_n = \frac{1}{4} b_{n-1}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{4} b_n$$

$$a_n = \frac{1}{4} b_{n-1}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 184022

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 19

Session : 2024

Épreuve de : Maths appliquées EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

donc, $a_n = c_n$.

$$\text{or } a_n + b_n + c_n = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b_n + 2c_n = 1.$$

$$5) \quad V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$a) \quad U_n V = (a_n \quad b_n \quad c_n) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (2a_n - b_n + 2c_n)$$

$$\begin{aligned} U_{n+1} V &= (2a_{n+1} - b_{n+1} + 2c_{n+1}) = \left(\frac{1}{2}b_n - a_n - \frac{1}{2}b_n - c_n + \frac{1}{2}b_n \right) \\ &= \left(-a_n + \frac{1}{2}b_n - c_n \right) = (2a_n - b_n + 2c_n) \times -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

D'où $(U_n V)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$(U_n V) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times (2a_0 - b_0 + 2c_0) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

6) Soit $n \in \mathbb{N}_-$

$$2c_n = 1 - b_n$$

$$\text{donc } 1 + 2a_n - b_n + 2c_n = 2a_n + 4c_n \\ = 2(a_n + 2c_n)$$

$$= 2a_n(a_n + 1 - b_n) = 2(a_n + b_n + c_n - b_n + a_n) \\ = 2(2a_n + c_n)$$

$$\text{Or } 2a_n + c_n = a_n + 2c_n \Leftrightarrow a_n + a_n + c_n = a_n + c_n + c_n \\ \Leftrightarrow a_n = c_n$$

Donc $a_n = c_n$

$$\text{et } 2a_n - b_n + 2c_n$$

$$2(a_n + 2c_n) - 1 = 2a_n - b_n + c_n$$

$$\text{Or } a_n = c_n$$

$$\text{Donc } 6a_n - 1 = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow 6a_n = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1$$

$$\Leftrightarrow a_n = -\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6} = c_n$$

$$\text{De plus } b_n + a_n + c_n = 1$$

$$\text{Donc } b_n = 1 - 2a_n = 1 - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

74 D'où $P(X_n = 0) = a_n = \frac{1}{6}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = P(X_n = 2)$

$$P(X_n = 1) = b_n = \frac{1}{3}\left(2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

7) / g' admette

$$8) M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

g' admette. —

b) On a $P: n \mapsto 2n^3 - n^2 - n$
est un polynôme annulateur de M .
1 est racine évidente.

Donc $\Delta \text{Sp}(M) \subset \{1\}$.

$$M - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 & L_2 & L_3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} -(L_1 + L_3) = L_2 \\ \text{donc } \text{rg}(M - I) = 2 \\ \text{et } 1 \in \text{Sp}(M) \end{matrix}$$

c) P est inversible par concaténation de familles libres associées aux
autres espaces propres.

g) Une récurrence rapide le montre.

$$\bullet U_0 = U_0 M^0 = U_0 \quad P(0) \text{ vraie}$$

$$\bullet \bullet \text{ Soit } n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n M = U_0 M^n M = U_0 M^{n+1} \quad P(n+1) \text{ vraie} \\ \text{(HR)}$$

Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 M^n$

