Copie anonyme - n°anonymat : 576341

G7-00085
576341
Mat2 Appli

Code épreuve : 287	Nombre de pages : 27	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques 2 Appliquées

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Partie 1 :

1. Puisque A est symétrique elle est diagonalisable elle est donc semblable à une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

C'est-à-dire on a une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = PDP^{-1} \iff \boxed{D = P^{-1}AP}$$

Les éléments diagonaux de D sont les valeurs propres de A

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1, & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Appliquons le pivot de Gauss sur cette matrice

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -\lambda & 0 \\ 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + (1-\lambda) L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda(1-\lambda) & -1 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix} \quad C_2 \leftrightarrow C_3$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -1 & -1-\lambda(1-\lambda) \\ 0 & -\lambda & \lambda \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - \lambda L_2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -1 & -1-\lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & \lambda+\lambda+\lambda(1-\lambda) \end{pmatrix}$$

Ainsi $A - \lambda I_3$ est non inversible pour λ vérifiant

$-3\lambda + \lambda^2 = 0 \iff \lambda(3-\lambda) = 0$

$\iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \text{ou} \\ \lambda = 3 \end{cases}$

Ainsi les valeurs propres de A sont 0 et 3 et donc on a bien

$$|0| + |3| = 3$$

D'où $\boxed{\mathcal{E}(A) = 3}$

3.
```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
def energie (A):
    B = al.eigvals (A)
    C = np.abs (A)
return np.sum (C)
```

4. La formule du produit matriciel donne, en notant $C = AB$
$= (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Ainsi on a
$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} \right)$$
$$\boxed{= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,i} \right)}$$

$$\boxed{= \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{j,i}}$$

b) Par commutativité du produit, on a

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j}\, b_{j,i} = b_{j,i}\, a_{i,j}$$

Ainsi
$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, b_{j,i} \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{j,i}\, a_{i,j} \right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{j,i}\, a_{i,j} \right)$$
$$= tr(BA)$$

Puisque ${}^tA$ et A ont les mêmes coefficients diagonaux, alors la matrice ${}^tAA$ a bien pour coefficients diagonaux, en notant $a'_{i,j}$ les coefficients diagonaux de ${}^tA$;

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a'_{i,j}\, a_{j,i} = a_{j,i}\, a_{j,i}$$
$$= a_{j,i}^{\ 2}$$

Ainsi $tr({}^tAA) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{j,i}^{\ 2}$

Si $tr({}^tAA) = 0$ on a donc une somme de termes positifs qui est nulle donc tous les coefficients sont nuls. Soit la matrice ${}^tAA$ ne possède que des coefficients diagonaux nuls soit A également

Code épreuve : 287	Nombre de pages :	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques 2 Appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

c) On suppose A et B semblables, on a donc l'existence d'une matrice inversible P telle que $A = PBP^{-1}$

Mais puisque $tr(AB) = tr(BA)$,

on a donc $tr(PBP^{-1}) = tr(P^{-1}PB)$

$= tr(B)$

Ainsi on a bien $\underline{tr(A) = tr(B)}$ si A et B sont semblables

5. a) On a $|tr(A)| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\right|$

Puisque A est symétrique, on a bien d'après la question 1, l'existence d'une matrice ~~symétri~~ inversible P telle que

$D = P^{-1}AP$

Or d'après la question précédente

$tr(A) = tr(D)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Soit en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de D, on a

$$|tr(A)| = |\sum_{k=1}^{n} \lambda_k|$$

L'inégalité triangulaire sur les sommes assure que

$$|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|$$

$$\Leftrightarrow \boxed{|tr(A)| \leq \mathcal{E}(A)}$$

b) Puisque A est symétrique, ${}^tA = A$, soit

$$A^2 = {}^tAA$$

Ainsi d'après 4)b) $tr(A^2) = tr({}^tAA)$

$$= \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{j,i}^2$$

Or puisque A possède la même trace que la matrice D précédemment introduite, chaque $a_{j,i}$ correspond à un élément diagonal de D soit à λ_1 ou λ_2 ou... ou λ_n

Ainsi on a bien $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = tr(A^2)}$

6. On a

$$A = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $tr(A) = 2 + 2 + 2$

$= 6$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$tr(A^2) = 6 + 6 + 6$

$= 18$

A n'est pas inversible car en notant L_1, L_2, L_3 ses lignes, on a
$L_1 = -L_1 - L_2$

Ainsi 0 est valeur propre de A

Partie 2 :

```
import numpy as np
```

7)a)

```
def mod2k(u, v, w, A):

    L = np.array([])
    B = u* A
    C = v* A
    D = w* A
    L.append(B, C, C, D)
return L
```

b) >>> mod2k(1 , -1, 2, np.array([[-2,1],[1,-2]])

8) a) $(U*A)Y = \begin{pmatrix} uA & vA \\ vA & wA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aX \\ bX \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} uaAX + vbAX \\ vaAX + wbAX \end{pmatrix}$

car X est un vecteur propre de A associé à μ

$= \begin{pmatrix} ua\mu X + vb\mu X \\ va\mu X + wb\mu X \end{pmatrix}$

$= \mu \begin{pmatrix} uaX + vbX \\ vaX + wbX \end{pmatrix}$

$= \mu \begin{pmatrix} (ua + vb)X \\ (va + wb)X \end{pmatrix}$

Copie anonyme - n°anonymat : 576341

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Mathematiques 2 Appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

b) On a d'après l'égalité précédente,

$$(U*A)Y = \mu \begin{pmatrix} (ua+vb)X \\ (va+wb)X \end{pmatrix}$$

On cherche donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$(U*A)Y = \alpha Y \quad \text{soit} \quad \mu \begin{pmatrix} (ua+vb)X \\ (va+wb)X \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} aX \\ bX \end{pmatrix}$$

On cherche donc α tel que

$$\begin{cases} a\alpha = \mu va + \mu vb \\ b\alpha = \mu va + wb\mu \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha(a-b) = \mu vb - wb\mu \\ b\alpha = \mu va + wb\mu \end{cases}$$

$a-b \neq 0$ ~~car $\binom{a}{b}$ est un vecteur propre de U~~

$$\cancel{\iff \begin{cases} \alpha = \frac{\mu vb - wb\mu}{a-b} \end{cases}}$$

9/a) Puisque A et U sont symétriques, elles sont diagonalisables et ainsi par définition il existe une base $\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\right)$ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de U

De même, on a une base composée de n vecteurs (car $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) $(X_1, \dots, X_n)$ qui sont des vecteurs propres de A

b) Puisque $\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$,

les deux vecteurs qui composent cette base sont non-colinéaires, de même pour les vecteurs $X_1, \dots, X_n$

~~On a donc $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$ Y_i est non colinéaire avec Z_i~~

~~De plus par produit de vecteurs non colinéaires, tous~~

~~Pour $i \in [\![1, n]\!]$, Y_i ne forme pas une famille liée avec les autres vecteurs $(Y_j)_{\substack{j \in [\![1,n]\!] \\ j \neq i}}$~~

~~car $(X_1, \dots, X_n)$ est une famille libre~~

La famille $(Y_1, Z_1, \dots Y_n, Z_n)$ est libre

car les vecteurs changent selon les X_i qui forment une famille libre ou selon les coefficients associés aux X_i qui sont $\binom{a}{b}$ et $\binom{c}{d}$ mais ces deux vecteurs sont non-colinéaires
Ainsi chaque vecteur de cette famille n'est colinéaire avec aucun autre donc cette famille est libre

c)

d) Puisque $U * A$ est semblable à la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\gamma_1\mu_1, \gamma_2\mu_1, \dots, \gamma_1\mu_n, \gamma_2\mu_n$, on a

alors $\mathcal{E}(U*A) = \sum_{k=1}^{n} |\gamma_1\mu_k| + \sum_{k=1}^{n} |\gamma_2\mu_k|$

De plus $\mathcal{E}(U) = |\gamma_1| + |\gamma_2|$

et $\mathcal{E}(A) = \sum_{k=1}^{n} |\mu_k|$

On a donc

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(U) \times \mathcal{E}(A) &= (|\gamma_1| + |\gamma_2|) \sum_{k=1}^{n} |\mu_k| \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\gamma_1||\mu_k| + \sum_{k=1}^{n} |\gamma_2||\mu_k| \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\gamma_1\mu_k| + \sum_{k=1}^{n} |\gamma_2\mu_k| \\
&= \mathcal{E}(U*A)
\end{aligned}
$$

10) a)

$$A_n = \left(\quad \right.$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque G_{2n} conserve les arêtes de G_n on a déjà que le premier coefficient de U est 1 et donc également ~~celui le second de la seconde ligne car G_{2n} est non orienté donc la matrice d'adjacence est symétrique.~~
De même les autres coefficient valent 1 car on relie les arêtes en faisant un graphe semblable à G_n et on relie le i^e sommet au sommet $n+i$ si i et j sont reliés dans G_n. Le dernier coefficient vaut 0 car les nouveaux sommets ne peuvent être reliés entre eux
~~De plus, $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de U si et seulement si~~

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

λ est valeur propre de U si et seulement si λ vérifie

$$-(1-\lambda)\lambda - 1 = 0 \iff -\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \text{ou} \\ \lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 576341

Code épreuve : 287	Nombre de pages :	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques 2 Appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Ainsi $\mathcal{E}(U) = \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| + \left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$= \sqrt{5}$$

D'après la question g) d), on a donc puisque A_{2m} et A_m sont symétriques en tant que matrice d'adjacence d'un graphe non orienté et que U est également symétrique

$$\mathcal{E}(A_{2m}) = \mathcal{E}(U)\mathcal{E}(A_m)$$

$$\boxed{= \sqrt{5}\,\mathcal{E}(A_m)}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie 3 :

1) a) $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}$ est la somme des degrés des sommets de $G(A)$, puisque les sommets isolés sont de degrés 0 alors
$\forall (i,j) \notin I, \ a_{i,j} = 0$
Puisque une arête relie deux sommets, la somme des degrés donne bien deux fois le nombre d'arêtes du graphe $G(A)$

On a donc bien finalement

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in I^2} a_{i,j} = 2m$$

b) Puisqu'il y a $n-p$ sommets isolés, il y en a p non-isolés, puisque ces sommets sont non-isolés ils sont au moins de degrés 1 et ainsi la somme des degrés des sommets de $G(A)$ est superieure ou égale à ce nombre de sommets non isolés, soit
$2m \geq p \iff \frac{2m}{p} \geq 1 \quad (p > 0)$

De plus, chaque sommet non-isolé est au maximum relié à $p-1$ autres sommets soit chaque sommet non-isolé est maximum de degrès $p-1$
Ainsi la somme des degrés de $G(A)$ ne peut pas être superieure à $p(p-1)$, ce qui est vérifié si chaque sommet non isolé est relié à tous les autres sommets non-isolés

14/

Ainsi on a $2m \leq p(p-1) \iff \frac{2m}{p} \leq p-1$

On obtient donc finalement

$$\boxed{1 \leq \frac{2m}{p} \leq p-1}$$

12) a) Puisqu'il y a au maximum $n-2$ sommets isolés, au moins 2 sommets sont reliés entre eux et ainsi la matrice d'adjacence est non nulle

A étant une matrice d'adjacence d'un graphe non-orienté sans boucle, elle est symétrique et ainsi A est diagonalisable soit A est semblable à une matrice diagonale non nulle, c'est-à-dire il existe une matrice inversible P telle que

$A = PDP^{-1} \iff P^{-1}AP = D$

D est non nulle car si D était nul on aurait $A = P0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}P$

$= 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

ce qui est absurde au vu de ce que l'on a vu précédemment

b) Puisque A et D sont semblables on a
$tr(A) = tr(D)$

Or A ne possédant aucune boucle, tous ses coefficients diagonaux sont nuls et ainsi
$tr(A) = 0$
$\boxed{= tr(D)}$

Puisque $D = P^{-1} A P$, on a

$D^2 = P^{-1} A P P^{-1} A P$
$= P^{-1} A^2 P$

Ainsi D^2 est semblable à A^2 et on a donc d'après 4)c)
$tr(D^2) = tr(A^2)$

$= tr({}^tAA)$ car A est symétrique donc ${}^tA = A$

$\boxed{= \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{j,i}^2}$

~~Je ne parviens pas à montrer~~ $\cancel{\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{j,i}^2 = 2m}$

Puisque les coefficients de la matrice A sont soit des 0 soit des 1, alors

$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad a_{i,j}^2 = a_{i,j}$ et ainsi

$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}$

$\boxed{= 2m}$

Copie anonyme - n°anonymat : 576341

Code épreuve : 287	Nombre de pages :	Session : 2024

Emplacement QR Code

Épreuve de : Mathématiques & Appliquées

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

J'ai commencé cette copie à la dernière page par mégarde

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

13) a) Puisque k est un sommet isolé, alors la k^e ligne et la k^e colonne de A sont remplies de 0 ainsi en multipliant A par E_k tous les termes valent 0 puisque chaque coefficient de E_k valent 0 sauf le k^e mais le k^e coefficient de chaque ligne de A vaut 0 et ainsi on a bien

$$AE_k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \iff \underline{E_k \in \ker(A)}$$

Puisqu'il y a $n-p$ sommets isolés alors il y a au moins $n-p$ vecteurs de la famille libre $(E_1, \dots, E_n)$ qui appartiennent à $\ker(A)$
Et ainsi, puisque $(E_1, \dots, E_n)$ est une famille libre on a bien
$\underline{\dim(\ker(A)) \geq n-p}$

car une base de $\ker(A)$ doit contenir au moins $n-p$ vecteurs pour être génératrice des des $n-p$ vecteurs E_k

(Si $n > p$, alors il y forcément des sommets isolés, au minimum 1, et donc les)

b) En utilisant la question 5) a) on a

$$\mathrm{tr}(A^2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$$
$$= \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^2$$

Or puisque A^2 et D^2 sont semblables, on a
$\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(D^2)$

Copie anonyme - n°anonymat : 576341

Code épreuve : 287	**Nombre de pages :**	**Session :** 2024

Épreuve de : Mathématiques 2 Appliquées

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Soit $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k^2 = tr(D^2)$

$\boxed{= 2m}$ d'après 12) b)

c) On a

$\sum_{1\leq i,j\leq n} (x_i - x_j)^2 \geqslant 0$ en tant que somme de termes positifs

$\Leftrightarrow \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i^2 - 2x_ix_j + x_j^2 \geqslant 0$

linéarité de la somme

$\Leftrightarrow \sum_{1\leq i,j\leq n} (x_i^2 + x_j^2) - \sum_{1\leq i,j\leq n} 2x_ix_j \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\sum_{1\leq i,j\leq n} (x_i^2 + x_j^2) \geqslant \sum_{1\leq i,j\leq n} 2x_ix_j}$

~~En prenant pour $i \neq j$, on a donc~~

$$\cancel{\sum_{i=1}^{n} 2x_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} 2x_i^2}$$

$$\cancel{\iff \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

d)

14) a) On a ${}^tQ = {}^t({}^tP)$

$$= P$$

Or $Q = P^{-1}$ d'où ${}^tQ\,Q = PP^{-1}$

$$= I_n$$

On a donc bien $\boxed{Q^{-1} = {}^tQ}$

Et puisque $A = PDP^{-1}$, on a bien

$$\boxed{A = {}^tQDQ}$$

$${}^tYY = {}^t(QX)\,QX$$
$$= {}^tX\,{}^tQ\,Q\,X \text{ , car } {}^tQ = Q^{-1}$$
$$\boxed{= {}^tXX}$$

b) $${}^tYDY = {}^t(QX)\,P^{-1}APQX$$

$$= {}^tX\,{}^tQ\,P^{-1}APQX$$

$$= {}^tX\,PP^{-1}APP^{-1}X$$

$$\boxed{= {}^tXAX}$$

le produit DY donne la matrice diagonale avec pour coefficients diagonaux $\lambda_1 y_1, \dots, \lambda_n y_n$

Ainsi

$${}^tYDY = (y_1 \ \cdots \ y_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_2 y_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n y_n \end{pmatrix}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2\right)$$

$$\boxed{= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2}$$

On a ${}^tXAX = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2$

$\theta\, {}^tXX = \theta\, {}^tYY$

$= \theta \sum_{k=1}^{n} y_k^2$

Or puisque $\theta = \max_{1\leq k\leq n} \lambda_k$, alors tous les $\lambda_k \neq \theta$ sont par définitions inferieurs à θ

Ainsi $\forall k \in [\![1, n]\!], \lambda_k \leq \theta$ $\Big\}$ $y_k^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], \lambda_k y_k^2 \leq \theta y_k^2$

Ainsi en sommant cette égalité on a

$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \leq \theta \sum_{k=1}^{n} y_k^2$

$\Leftrightarrow \boxed{{}^tXAX \leq \theta\, {}^tXX}$

15. Je suppose que ${}^tUAU = 2m$, en prenant $X = U$ dans la question précédente, on a donc

${}^tUAU \leq \theta\, {}^tUU$

Or ${}^tUU$ est un réel qui vaut le nombre de sommets non-isolés de A et ainsi ${}^tUU = p$ (${}^tUU$ est un produit de termes valant 0 ou 1 avec p fois la multiplication 1×1)

Copie anonyme - n°anonymat : 576341

Code épreuve : 287	Nombre de pages :	Session : 2014

Épreuve de : Mathématiques 2 Appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Ainsi on a ${}^tUAU \leq \theta\, {}^tUU$

$$\iff 2m \leq \theta p$$

$$\iff \boxed{\frac{2m}{p} \leq \theta}$$

b) On a déjà $\frac{2m}{p} \leq \theta \iff \frac{2m}{p\sqrt{2m}} \leq \frac{\theta}{\sqrt{2m}}$ $(\sqrt{2m} > 0)$

$$\iff \frac{\sqrt{2m}}{p} \leq \frac{\theta}{\sqrt{2m}}$$

De plus, on a vu $2m \geq p \implies \sqrt{2m} \geq \sqrt{p}$ par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$

~~Ainsi puisque d'après A1) b)~~

$\cancel{A \leq \frac{2m}{p}}$, ~~alors~~

On a donc $\frac{\sqrt{2m}}{p} \geq \frac{\sqrt{p}}{p} \iff \frac{\sqrt{2m}}{p} \geq \frac{1}{\sqrt{p}}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

D' après 13) b) $\theta \leq \sqrt{2m} \Leftrightarrow \frac{\theta}{\sqrt{2m}} \leq 1$

On obtient finalement $\boxed{\frac{1}{\sqrt{p}} \leq \frac{\sqrt{2m}}{p} \leq \frac{\theta}{\sqrt{2m}} \leq 1}$

17) a)

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}}$$

b) $A + I_n$ est non inversible car remplie de 1 donc -1 est bien valeur propre de A

c) On $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (n-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi $n-1$ est bien valeur propre de A

18.
```
def degMax(A):
    c=0
    a,b = np.shape(A)
    for i in range(a):
        for j in range(b):
            if A[i,j] > c:
                c = A[i,j]
            else:
                c=c
    return c
```

/