

Copie anonyme - n°anonymat : 576341



G7-00085
576341
Mat Appli

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 31

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1:

1) a) Soit $x \in]0, 1[$,

$$\frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x} = \frac{a(2+x) + b(2-x)}{(2-x)(2+x)}$$
$$= \frac{2a + ax + 2b - bx}{2^2 - x^2}$$

On a donc $\begin{cases} a-b=0 \\ 2a+2b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a=b=\frac{1}{4}}$

b) On a donc $U_0 = \int_0^1 \frac{1}{4-x^2} dx$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} dx$$

$$= \frac{1}{4} [-\ln(2-x) + \ln(2+x)]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} (-\ln(1) + \ln(3) + \ln(2) - \ln(2))$$

$$= \frac{1}{4} \ln(3)$$

$$2) U_n = \int_0^1 \frac{x}{4-x^2} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \ln(4-x^2) \right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2} (\ln(3) - \ln(4))$$

$$= -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

3) a) Soit $m \in \mathbb{N}$,

$$U_m - U_{m+1} = \int_0^1 \frac{x^m}{4-x^2} dx - \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{4-x^2} dx \quad \begin{array}{l} \text{par linéarité} \\ \text{de l'intégrale} \end{array}$$

$$= \int_0^1 \frac{4x^m - x^{m+1}}{4-x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^m (4-x^2)}{4-x^2} dx$$

$$= \left[\frac{x^{m+1}}{m+1} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{m+1}$$

```

b) def suite(m):
    if (-1)**m == 1:
        u = mp.log(3)/4
        for k in range(2, m+1, 2):
            u = 4*u - 1/k
    else:
        u = mp.log(2/mp.sqrt(3))
        for k in range(3, m+1, 2):
            u = 4*u - 1/k
    return u

```

4)a) Soit $m \in \mathbb{N}$, soit $x \in [0, 1]$, on a

$$4 \geq 4 - x^2 \geq 3 \quad \text{et ainsi par décroissance}$$

de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+$,

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4-x^2} \leq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x^m}{4} \leq \frac{x^m}{4-x^2} \leq \frac{x^m}{3} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} x^m \geq 0$$

Les fonctions en jeu étant continues sur $[0, 1]$,
on a par croissance de l'intégrale, les
bornes étant dans l'ordre croissant

$$\int_0^1 \frac{x^m}{4} dx \leq U_m \leq \int_0^1 \frac{x^m}{3} dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \left[\frac{x^{m+1}}{m+1} \right]_0^1 \leq U_m \leq \frac{1}{3} \left[\frac{x^{m+1}}{m+1} \right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4(m+1)} \leq U_m \leq \frac{1}{3(m+1)}$$

c) Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3(n+1)} = 0$

On a par théorème d'encadrement, la suite (U_n) est convergente et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

c) $\sum_{n \geq 0} U_n$ est divergente car son terme général est supérieur à celui d'une série positive divergente ($\sum_{n \geq 0} \frac{1}{4(n+1)}$ proportionnelle à une série harmonique)

Ainsi par critère de comparaison sur les séries à terme général positif, $\sum_{n \geq 0} U_n$ diverge

5)a) En suivant ce graphique qui renvoie les 40 premiers termes de la suite $(3n U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on peut supposer que:

$$U_n \sim \frac{1}{3n}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 576341

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\begin{aligned} \text{b) On pose } u' : x &\mapsto x^m & u : x &\mapsto \frac{x^{m+1}}{m+1} \\ v : x &\mapsto \frac{1}{4-x^2} & v' : x &\mapsto \frac{2x}{(4-x^2)^2} \end{aligned}$$

'u et v sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et on a par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^m}{4-x^2} dx &= \left[\frac{x^{m+1}}{(m+1)(4-x^2)} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1} \frac{2x}{(4-x^2)^2} dx \\ &= \frac{1}{3(m+1)} - \frac{2}{m+1} \int_0^1 \frac{x^{m+2}}{(4-x^2)^2} dx \end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale

c) Soit $m \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, on a par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$,

$$9 \leq (4-x^2)^2 \leq 16$$

Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{16} &\leq \frac{1}{(4-x^2)^2} \leq \frac{1}{9} \\ \Rightarrow \frac{x^{m+2}}{16} &\leq \frac{x^{m+2}}{(4-x^2)^2} \leq \frac{x^{m+2}}{9} \end{aligned}$$

$x^{m+2} \geq 0$

Par croissance de l'intégrale, on a

$$\frac{1}{9} \int_0^1 x^{m+2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{m+2}}{(4-x^2)^2} dx \leq \frac{1}{16} \int_0^1 x^{m+2} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9(m+3)} \leq \int_0^1 \frac{x^{m+2}}{(4-x^2)^2} dx \leq \frac{1}{16(m+3)}$$

$$\text{Or } \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{9(m+3)} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{16(m+3)} = 0$$

Ainsi, par théorème d'encadrement on a bien

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{m+2}}{(4-x^2)^2} dx = 0$$

d) Grâce à la question 5b), on a

$$\forall m \in \mathbb{N}, 3m U_m = \frac{3m}{3m+3} = \frac{6m}{m+1} \int_0^1 \frac{x^{m+2}}{(4-x^2)^2} dx$$

$$\text{Or on a } \frac{3m}{3m+3} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1 \quad \frac{6m}{m+1} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 6$$

Et ainsi grâce à la question précédente, on en déduit par somme et produit de limites,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} 3m U_m = 1 \Rightarrow \underline{U_m \sim \frac{1}{3m}}$$

Exercice 2:

- 1) a) f est continue sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur cet intervalle et sur $] -\infty, 0]$ en tant que fonction constante
- f est positive sur $] -\infty, 0]$ comme fonction constante positive et sur $[0, +\infty[$ comme produit de fonctions positives

• De plus, on a:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\&= \left[-e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^{+\infty} \\&= -\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} + e^0 \\&= 0 + 1 \\&= 1\end{aligned}$$

Ainsi f peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X

- b) Le moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite vaut, d'après la formule de Leönig-Huygens,
- $$1 - 0 = 1$$

c) X a une espérance si et seulement si

$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ converge absolument

$$\text{On a } \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

car $x \mapsto x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$ est une fonction paire et cette intégrale est bien strictement convergente (ce qui coïncide avec sa convergence semble) car elle est proportionnelle à l'intégrale définissant le moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire normale centrée réduite.

$$E(X^2) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{4}} \times 1$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 576341

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 2024

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques Appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

2) Si $x < 0$, on a $F_x(x) = 0$

Soit $x \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} F_x(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\ &= \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_0^x t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \left[-e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^x \\ &= 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

Ainsi

$$F_x(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3) Puisque $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, $X'(\Omega) = \mathbb{R}_+$

Ainsi si $x < 0$, $F_2(x) = 0$

Soit $x \geq 0$, on a

$$F_2(x) = P(Z \leq x)$$

$$= P(X' \leq x) \quad \left. \begin{array}{l} \text{croissance de la fonction racine} \\ \text{carrée sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } |X| = X \end{array} \right\}$$

$$= P(X \leq \sqrt{x})$$

$$= F_X(\sqrt{x})$$

$$= 1 - e^{-\frac{\sqrt{x}^2}{2}} \quad \left. \begin{array}{l} \sqrt{x} \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$= 1 - e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\text{Ainsi } F_2(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On en déduit $Z \hookrightarrow E(\frac{1}{2})$ | puisque la
fonction de répartition caractérise la loi

b) def simulX():
 return (np.sqrt(2 * rd.exponential(2)))

4) a) Puisque $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, on a $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$ et ainsi
 $\forall x < 0, G_n(x) = 0$

Soit $x \geq 0$, on a

$$G_n(x) = P(Y_n \leq x)$$

$$= P\left(\frac{X}{\sqrt{n}} \leq x\right)$$

$$= P(X \leq \sqrt{n}x) \quad \left. \begin{array}{l} \sqrt{n} \geq 0 \\ \sqrt{n}x \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$= 1 - e^{-\frac{(\sqrt{n}x)^2}{2}}$$

$$= 1 - e^{-\frac{nx^2}{2}}$$

Ainsi on a bien

$$G_n(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{nx^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b) Soit $x < 0$, on a $G_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Soit $x > 0$, $1 - e^{-\frac{nx^2}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - 0 = 1$

Ainsi $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers la variable aléatoire certaine égale à 0

c) Soit $\varepsilon > 0$, on a déjà $|Y_m| = Y_m$, de plus

$$P(|Y_m| > \varepsilon) = P(Y_m > \varepsilon)$$

$$= 1 - P(Y_m \leq \varepsilon)$$

$$= 1 - (1 - e^{-m\varepsilon^2/2}) \quad \left. \varepsilon > 0 \right\}$$

$$= e^{-m\varepsilon^2/2}$$

$$\text{Ainsi } \lim_{m \rightarrow +\infty} P(|Y_m| > \varepsilon) = \lim_{m \rightarrow +\infty} e^{-m\varepsilon^2/2}$$

$$= 0$$

5) a) Si le minimum est strictement supérieur à un réel alors toutes les variables sont supérieures à ce réel, ainsi on a pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P(Y_m > x) &= P\left(\bigwedge_{k=1}^m [X_k > x]\right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{par indépendance des} \\ \text{variables aléatoires} \end{array} \right\} \\ &= \prod_{k=1}^m P(X_k > x) \\ &= \prod_{k=1}^m P(X > x) \quad \left. \begin{array}{l} \text{les variables aléatoires} \\ \text{suivent toutes la même loi} \end{array} \right\} \\ &= (1 - F_X(x))^m \end{aligned}$$

Puisque Y_m est le minimum de variables aléatoires dont le support est $\mathbb{R}_+$, alors

$$Y_m(\Omega) = \mathbb{R}^+, \text{ ainsi}$$

$$\forall x < 0^+, F_{Y_m}(x) = 0$$

Copie anonyme - n°anonymat : 576341

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Soit $x \geq 0$, on a

$$F_{H_n}(x) = P(H_n \leq x)$$

$$= 1 - P(H_n > x)$$

$$= 1 - (1 - F_X(x))^n$$

$$= 1 - \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^n$$

$$= 1 - e^{-\frac{nx^2}{2}}$$

Puisque la fonction de répartition caractérise la loi et que H_n et Y_n ont la même fonction de répartition, alors H_n et Y_n suivent la même loi

b) def simulH(m):

$X = \text{np.array}([\text{simulX}() \text{ for } k \text{ in range}(m)])$

$H = \min(X)$

return H

Exercice 3:

1. En posant le changement de variable affine $u = x - t \Leftrightarrow t = x - u$, $du = -dt$ on a

$$\begin{aligned}
 1 + \int_0^x t f(x-t) dt &= 1 + \int_x^0 -(x-u) f(u) du \\
 &= 1 - \int_x^0 (x-u) f(u) du \\
 &= 1 + \int_0^x (x-u) f(u) du
 \end{aligned}$$

- 2) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$

En notant F une primitive de $u \mapsto (x-u)f(u)$ on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + F(x) - F(0)$$

et par linéarité de la dérivation, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = F'(x) - F'(0)$$

$$= (x-x)f(x) - (x-0)f(0)$$

$$= xf(0)$$

~~$0x \mapsto x$~~

b)

c) f' est la primitive de f s'annulant en 0, on a f est continue sur $\mathbb{R}$ donc f' est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, soit f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ |

De plus, par définition on a donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = f(x) \quad |$$

c) On a l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle précédente qui est $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = -1 \end{cases}$

Ainsi l'ensemble des solutions est

$$\{f: t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} \quad |$$

$$d) \text{ On a } f(0) = 1 + \int_0^0 (x-u) f(u) du$$

$$\underline{= 1}$$

$$f'(0) = \int_0^0 f(u) du$$

$$\underline{= 0}$$

Ainsi dans l'ensemble solution, λ et μ doivent vérifier

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \lambda = \mu = \frac{1}{2}$$

Ainsi le problème a au plus une solution qui est la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$1 - \int_0^x (x-u) \frac{e^u + e^{-u}}{2} du$$

En posant

$$v: u \mapsto x-u$$

$$g': u \mapsto \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

$$v': u \mapsto -1$$

$$g: u \mapsto \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$

v et g étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, x]$, on a par intégration par parties

Copie anonyme - n°anonymat : 576341

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 2014

Épreuve de : Mathématiques Appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\begin{aligned} 1 - \int_0^x (x-u) \frac{e^u + e^{-u}}{2} du &= 1 - \left[(x-u) \frac{e^u - e^{-u}}{2} \right]_0^x - \int_0^x - \frac{e^u - e^{-u}}{2} du \\ &= 1 + x \frac{1-1}{2} + \left[\frac{e^u + e^{-u}}{2} \right]_0^x \\ &= 1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{1+1}{2} \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Ainsi la fonction trouvée à la question 2)d) est bien la seule solution du problème

4) Les résultats de la question 2)a), b), c) restent valables et
 $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$

Ainsi λ et μ vérifient $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0$

Ainsi l'unique solution est la fonction nulle

Problème:

1) On sait qu'initialement l'urne A a une boule blanche et une boule noire. Ainsi:

$$a_0 = 0 \quad b_0 = 1 \quad c_0 = 0$$

b) On a $X_1(\omega) = \{0, 1, 2\}$

Pour que $[X_1 = 0]$ soit vérifié il faut que la boule blanche soit tirée dans A et la boule noire dans B, ainsi:

$$P(X_1 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ = \frac{1}{4}$$

Pour que $[X_1 = 2]$ soit vérifié il faut que ce soit l'inverse qui se produise d'où $P(X_1 = 2) = \frac{1}{4}$

Puisque (a_1, b_1, c_1) est un système complet d'événements, on a

$$P(X_1 = 1) = 1 - \frac{2}{4} \\ = \frac{1}{2}$$

c) Soit $m \in \mathbb{N}^*$, à l'instant m il peut

m' y avoir aucune boule blanche dans A ou bien une seule ou bien les 2 mais aucune autre solution m' est possible, ainsi

$([X_m=0], [X_m=1], [X_m=2])$ est bien un système complet d'événements

d) On a donc $\forall m \in \mathbb{N}, a_m + b_m + c_m = 1$

2)a) On a déjà si $|i - j| = 2$, alors
 $P_{(X_m=i)}(X_{m+1}=j) = 0$ car on ne peut avoir un

changement de deux boules en un seul tirage

$P_{(X_m=1)}(X_{m+1}=1) = \frac{1}{2}$ car c'est la probabilité que

soit l'on tire la boule noire présente dans l'urne A et dans l'urne B ou alors on tire la boule blanche dans chacune des deux urnes

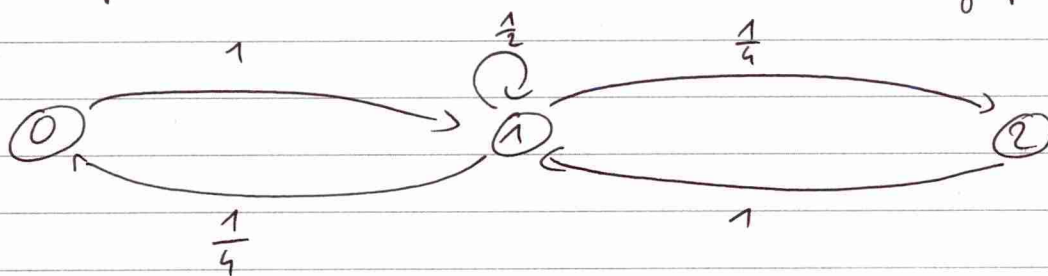
$P_{(X_m=0)}(X_{m+1}=1) = 1$ car on tire forcément une boule blanche de l'urne B et une boule noire de l'urne A

$P_{(X_m=1)}(X_{m+1}=2) = \frac{1}{4}$ car il faut tirer la boule blanche de B et la boule noire de A

$P_{(X_m=2)}(X_{m+1}=1) = 1$ car on est obligé de tirer une boule blanche de A et noire de B

$P_{(X_m=1)}(X_{m+1}=0) = \frac{1}{4}$ car il faut piocher la boule blanche dans A et la noire dans B

On retrouve bien les probabilités correspondantes aux pondérations des arêtes du graphe suivant:



$$b) \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) On a d'après la formule des probabilités totales:

$$a_{m+1} = P_{(X_m=0)}(X_{m+1}=0) P(X_m=0) + P_{(X_m=1)}(X_{m+1}=0) \\ + P_{(X_m=2)}(X_{m+1}=0)$$

$$= \frac{1}{4} a_m$$

De même, on a

$$b_{m+1} = a_m + \frac{1}{2} b_m + c_m$$

$$c_{m+1} = \frac{1}{4} b_m$$

Copie anonyme - n°anonymat : 576341

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 2024

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques Appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

3) Pour $m=0$, on a

$$a_1 = \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} b_0$$

$$b_1 = \frac{1}{2}$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + 0$$

$$= a_0 + \frac{1}{2} b_0 + c_0$$

$$c_1 = \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} b_0$$

Ainsi les relations restent valables pour $m=0$

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}$

Puisque (a_n, b_n, c_n) est un système complet d'événements, on a

$$a_{n+1} = 1 - b_{n+1} - c_{n+1}$$

$$\text{on a } E(X_{n+1}) = 0P(X_{n+1}=0) + 1P(X_{n+1}=1) + 2P(X_{n+1}=2)$$

$$= b_{n+1} + 2c_{n+1}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{on a } E(X_{n+1}) = b_{n+1} + 2c_{n+1}$$

$$= a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n + \frac{1}{2}b_n$$

$$= a_n + b_n + c_n \quad \text{1)d)}$$

$$= 1$$

c) On a d'après l'égalité précédente,
 $\forall n \in \mathbb{N}$

$$E(X_{n+1}) = 1 \Leftrightarrow b_{n+1} + 2c_{n+1} = 1$$

$$\text{On } b_0 + 2c_0 = 1 + 2 \times 0 = 1$$

Ainsi on a bien

$$\forall m \in \mathbb{N}, b_m + 2c_m = 1$$

5) Soit $m \in \mathbb{N}$, on a

$$U_m V = (a_m \ b_m \ c_m) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= 2a_m - b_m + 2c_m$$

$$U_{m+1} V = (a_{m+1} \ b_{m+1} \ c_{m+1}) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= 2a_{m+1} - b_{m+1} + 2c_{m+1}$$

$$= \frac{1}{2} b_m - a_m - \frac{1}{2} b_m - c_m + \frac{1}{2} b_m$$

$$= - (a_m - \frac{1}{2} b_m + c_m)$$

$$= -\frac{1}{2} U_m V$$

Ainsi $(U_m V)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique
de raison $-\frac{1}{2}$

b) On a donc

$$\forall m \in \mathbb{N}, U_m V = \left(-\frac{1}{2}\right)^m U_0 V$$

$$\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}, 2a_m - b_m + 2c_m = -\left(-\frac{1}{2}\right)^m$$

6) Soit $m \in \mathbb{N}$, on a

$$a_m + b_m + c_m = 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad a_m = 1 - b_m - c_m$$

$$(\Leftrightarrow) \quad a_m = 1 - (b_m + 2c_m) + c_m$$

$$(\Leftrightarrow) \quad a_m = c_m$$

On a donc

$$\begin{cases} 4c_m - b_m = -(-\frac{1}{2})^m \\ b_m + 2c_m = 1 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} 4c_m - b_m = -(-\frac{1}{2})^m \\ c_m = \frac{1 - (-\frac{1}{2})^m}{6} \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} b_m = 4c_m + (-\frac{1}{2})^m \\ c_m = \frac{1 - (-\frac{1}{2})^m}{6} \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} b_m = \frac{2}{3} (1 - (-\frac{1}{2})^m) + (-\frac{1}{2})^m \\ c_m = \frac{1}{6} (1 - (-\frac{1}{2})^m) \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} b_m = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} (-\frac{1}{2})^m \\ c_m = \frac{1}{6} (1 - (-\frac{1}{2})^m) \end{cases}$$

On obtient donc

$$a_m = c_m = \frac{1}{6} (1 - (-\frac{1}{2})^m)$$

$$b_m = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} (-\frac{1}{2})^m$$

Copie anonyme - n°anonymat : 576341

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 2024

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques Appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\text{On a donc } P(X_n=0) = \frac{1}{6} (1 - (-\frac{1}{2})^n) = P(X_n=2)$$

$$P(X_n=1) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} (-\frac{1}{2})^n$$

7) Puisque $|-\frac{1}{2}| < 1$, on a

$$(-\frac{1}{2})^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ ainsi}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n=0) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n=2) = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n=1) = \frac{2}{3}$$

Ainsi $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers la

variable aléatoire X de loi

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

$$P(X=1) = \frac{2}{3}$$

$$P(X=0) = P(X=2) = \frac{1}{6}$$

$$8/a) \quad M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 3/4 & 1/8 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 3/4 & 1/8 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/8 & 3/4 & 1/8 \\ 3/16 & 10/16 & 3/16 \\ 1/8 & 3/4 & 1/8 \end{pmatrix}$$

$$M^2 + M = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 3/4 & 1/8 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/4 & 6/4 & 1/4 \\ 3/8 & 10/8 & 3/8 \\ 1/4 & 6/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$= 2M^3$$

b) le polynôme $P = 2x^3 - x^2 - x$ est donc annulateur de $\mathcal{H}$.

$$\text{On a } P(x) = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 - x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ x=1 \\ \text{ou} \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } Sp(\mathcal{H}) \subset \left\{-\frac{1}{2}, 0, 1\right\}$$

0 est bien valeur propre de $\mathcal{H}$ car $\mathcal{H}$ est non inversible, soit $x \in \mathcal{H}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$x \in E_0(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \mathcal{H}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ 1/4 a + 1/4 c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=-c \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } \underline{E_0(\mathcal{H}) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)}$$

$$(M - I)X = 0 \quad (\Rightarrow) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} -a + b = 0 \\ \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c = 0 \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} a = b \\ a = c \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) a = b = c$$

Ainsi $\underline{E_1(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$

$$(M + \frac{1}{2}I)X = 0 \quad (\Rightarrow) \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} \frac{1}{2}a + b = 0 \\ \frac{1}{4}a + b + \frac{1}{4}c = 0 \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} b = -\frac{1}{2}a \\ c = a \end{cases}$$

Ainsi $\underline{E_{\frac{1}{2}}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$

Copie anonyme - n°anonymat : 576341

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 2024

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

c) / Puisque $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et qu'elle possède 3 valeurs propres, alors M est diagonalisable, soit il existe une matrice inversible dont chaque colonne correspond à un vecteur propre associé à une valeur propre de M , ce qui correspond bien à P , ainsi on a bien que P est inversible.

P est composée de la concaténation des bases des sous-espaces propres de M donc P est inversible car la concaténation forme une famille libre.

d)

$$MP = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & & & \\ 1/2 & 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & \end{array} \right)$$

$$PD = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc $MP = PD \Leftrightarrow M = PDP^{-1}$

Ainsi M est semblable à une matrice diagonale donc M est diagonalisable

e) Soit $m \in \mathbb{N}$, on a

$$U_m M = \begin{pmatrix} a_m & b_m & c_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} a_m & a_m + \frac{1}{2} b_m + c_m & \frac{1}{4} c_m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{m+1} & b_{m+1} & c_{m+1} \end{pmatrix}$$

$$= U_{m+1}$$

f) Par récurrence:

Initialisation:

$$\begin{aligned} U_0 H^0 &= U_0 I \\ &= U_0 \end{aligned}$$

Ainsi l'initialisation est vérifiée

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $U_n = U_0 H^n$

$$\begin{aligned} \text{Or } U_{n+1} &= U_n H \\ &= U_0 H^n H \quad \left. \begin{array}{l} \text{par hypothèse de récurrence} \end{array} \right\} \\ &= U_0 H^{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi l'hérédité est établie

On a bien $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 H^n$

g) Puisque H est diagonalisable, le calcul de H^n se fait facilement car

$$\forall n \in \mathbb{N}, H^n = P D^n P^{-1}$$

et puisque D est diagonale D^n s'obtient en élevant les coefficients diagonaux à la puissance n , ainsi une fois cette relation obtenue, on a

$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 H^n$ qui donne une matrice où le premier coefficient vaut $P(X_n=0)$, le second $P(X_n=1)$ et le dernier $P(X_n=2)$

