



W7-00199
839772
Mat2 Appli

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths. II Essec

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

PARTIE 1 :

1) Une matrice diagonale est une matrice symétrique donc inversible.

Notons M une telle matrice, $M \in M_n(\mathbb{R})$

on a $M = PDP^{-1}$

A est une matrice carrée symétrique donc diagonalisable
on peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec D une matrice diagonale
et P inversible

on a donc $D = P^{-1}AP$

les éléments diagonaux de D sont les valeurs propres de A .

2) A est symétrique donc diagonalisable

on cherche les valeurs propres de A :

Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 3z = \lambda x \\ -x = \lambda y \\ -x = \lambda z \end{cases}$$

on admet que A admet entre 1 et 3 valeurs

dont la somme de leurs valeurs absolues valent 3,

on a donc $\mathcal{E}(A) = 3$

(0 est une valeur propre car)
 $\text{rg}(A - 0I_n) = \text{rg}(A) = 2 \leq 3$)

3) def energie(A):

$B = \text{al.eigvals}(A)$

$a, b = \text{np.shape}(A)$

$c = 0$

for i in range(a):

$c = c + B[i, i]$

return(c).

on suppose numpy et
 numpy.linalg importés.

4) a) les coefficients diagonaux de AB s'écrivent :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji}$$

d'où $\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} \right)$

$= \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} b_{ji}$

} en regroupant les
 deux sommes.

b) les coefficients diagonaux de BA s'écrivent

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} a_{ji}$$

puis $\text{tr}(BA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} a_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} b_{ij} = \text{tr}(AB)$

car i et j jouent un rôle symétrique,
 et on peut inverser les deux sommes (les indices
 ne sont pas liés).

tA et A ont les mêmes coefficients diagonaux,

$$\text{d'où } \text{tr}({}^tAA) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ji} a_{ji} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ji}^2$$

en effet les coefficients de tA sont a_{ji} , la position des lignes et des colonnes est inversée par rapport à A .

si $\text{tr}({}^tAA) = 0$, tous les coefficients de la somme sont nuls car $(a_{ji})^2 \geq 0$ et une somme de termes positifs est nulle si tous ses termes sont nuls,

donc $a_{ji} = 0$ pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$

donc A est la matrice nulle.

c) si A et B sont semblables, on peut écrire avec une matrice P inversible :

$$A = PBP^{-1}$$

$$\text{et } B = P^{-1}AP$$

il faut se servir de cette relation
mais j'admet le résultat.

5) a) Par inégalité triangulaire :

$$|\text{tr}(A)| = \left| \sum_{i=1}^n a_{ii} \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_{ii}|$$

il reste à montrer que $|a_{ii}| \leq |\lambda_i|$

les $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ étant les valeurs propres de A .

j'admet le résultat.

$$b) \operatorname{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ji}$$

$$\begin{aligned} 6) a) A &= 3 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$b) \operatorname{tr}(A) = 2 + 2 + 2 = \underline{6}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{puis } \operatorname{tr}(A^2) = 6 + 6 + 6 = \underline{18}$$

3 est valeur propre évidente de A,

on a en effet avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$.

$$AX = 3X \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 3x \\ -y + 2y - z = 3y \\ -x - y + 2z = 3z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -x - y - z = 0$$

$$\Rightarrow x = -y - z$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } E_3(A) = \operatorname{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

il reste donc 1 valeur propre de A à trouver car
A est diagonalisable donc la dimension

Copie anonyme - n°anonymat : 839772

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 26

Session : 2024

Épreuve de : Maths II ESSEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

d'une base de ses vecteurs propres vaut 3.

$$\text{on a donc } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E}(A) = |3| + |3| + |x| = 6 + x.$$

pour retrouver que l'énergie vaut 6 il faudrait que
0 soit valeur propre (il ne semble pas l'être).
pourtant.

PARTIE 2:

7) a) $\text{mod2k}(u, v, w, A)$:

$a, b = \text{np.shape}(A)$.

$\Pi = \text{np.zeros}((a+2, b+2))$

$B = u * A$

$C = v * A$

$D = w * A$.

for i in range(a):

for j in range(b):

$\Pi[i, j] = B[i, j]$.

for i in range(a, 2+a):

for j in range(b):

$$\pi[i,j] = C[i-a,j]$$

... le même principe pour les autres
return (π).

$$b) \text{ mod } 2k \mid 1, -1, 2, A)$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ou en python: } A = \text{np.array}([[-2, 1], [1, -2]])$$

$$8) a) (U \circ A)Y = \begin{pmatrix} uAx + vAbx \\ vAx + wAbx \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} AX(ua+vb) \\ AX(va+wb) \end{pmatrix}$$

$AX = \mu X$
car μ est valen propre
de A avec X comme
vecten propre.

$$= \begin{pmatrix} \mu X(ua+vb) \\ \mu X(va+wb) \end{pmatrix}$$

$$= \mu \begin{pmatrix} X(ua+vb) \\ X(va+wb) \end{pmatrix}$$

b) Y est vecten propre de $U \circ A$ ssi $Y \neq 0$
et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(U \circ A)Y = \lambda Y$.

$$\text{d'où on cherche } (U \circ A)Y = \lambda Y \Leftrightarrow M \begin{pmatrix} (ua+vb)X \\ (va+wb)X \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} aX \\ bX \end{pmatrix}$$

λ tel que :

$$\Leftrightarrow \mu \begin{pmatrix} uaX \\ wbX \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} vbX \\ vaX \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} aX \\ bX \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

je ne trouve pas la valen propre.

9) a) $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right)$ forme une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

ssi ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (donc libre)
car composé de 2 vecteurs dans un espace de dimension 2.
1 se qui est le cas si ils sont des vecteurs propres associés à la même valeur propre)

ou car sont chacun des vecteurs propres de 2 valeurs propre
différentes donc non nuls donc formant des familles libres
puis par concaténation ils forment une base (même
argument dimension).

La justification pour $(x_1, \dots, x_n)$ se fait pareil, avec n
vecteurs dans un espace de dimension n .

b) supposons que $x_1 y_1 + y_1 z_1 + x_2 y_2 + y_2 z_2 + \dots + x_n y_n + y_n z_n = 0$

avec $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$

on doit montrer que $x_1 = y_1 = \dots = x_n = y_n = 0$.

$$x_1 y_1 + y_1 z_1 + \dots + x_n y_n + y_n z_n = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 a x_1 + y_1 c x_1 + \dots + x_1 a x_n + y_1 c x_n \\ x_1 b x_1 + y_1 d x_1 + \dots + x_1 b x_n + y_1 d x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

je ne sais pas conclure

c) on cherche à montrer pour $P \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ inversible.

$$U \circ A = P \begin{pmatrix} y_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y_{2n} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & y_{2n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

on a avec b) $(y_1, z_1, \dots, y_n, z_n)$ est libre est composée de $2n$
éléments donc c'est une base de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

cette famille est composée de vecteurs propres de $U = A$
(il faut certainement le justifier avec 8)b)).

associées aux valeurs propres $\gamma_1 \mu_1, \gamma_2 \mu_2, \dots, \gamma_1 \mu_n, \gamma_2 \mu_n$
respectivement.

comme $U = A$ est symétrique, elle est diagonalisable
donc on a bien l'égalité précédente,
ce qui prouve que $U = A$ est semblable à une matrice
diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs
propres ci-dessus.

$$\begin{aligned} d) \quad \mathcal{E}(U + A) &= \sum_{k=1}^n |\gamma_1 \mu_k + \gamma_2 \mu_k| \\ &= \sum_{k=1}^n |\gamma_1 + \gamma_2| |\mu_k| \\ &= |\gamma_1 + \gamma_2| \sum_{k=1}^n |\mu_k| \\ &= \mathcal{E}(U) + \mathcal{E}(A) \end{aligned}$$

$$10) a) \quad \text{on a } U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{tel que } A_{2n} = U + A_n$$

$$\begin{aligned} b) \quad \mathcal{E}(A_{2n}) &= \mathcal{E}(U + A_n) \\ &= \mathcal{E}(U) + \mathcal{E}(A_n) \end{aligned}$$

on cherche les valeurs propres de U :

$$\begin{aligned} \lambda \in Sp(U) &\Leftrightarrow U - \lambda I_2 \text{ est non inversible} \\ &\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 839772

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 20

Session : 2024

Épreuve de : Maths II ESSEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\lambda \in Sp(u) \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

on étudie ce trinôme, de discriminant $1+4=5$,

et de racines $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\text{d'où } Sp(u) = \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\},$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } E(u) &= \left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| + \left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| \\ &= \frac{\sqrt{5}-1+1+\sqrt{5}}{2} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, on a bien } \underline{E(A_n) = \sqrt{5} E(A_1)}.$$

PARTIE 3:

$$\begin{aligned} 11) a) \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} &= \sum_{(i,j) \in \mathbb{I}^2} a_{ij} + \underbrace{\sum_{(i,j) \notin \mathbb{I}^2} a_{ij}}_{=0} \\ &= \sum_{(i,j) \in \mathbb{I}^2} a_{ij} \end{aligned}$$

en effet, les sommets de degré 0 sont représentés par un coefficient nul sur la matrice d'adjacence.

puis par la formule d'Euler on a :

$$\sum_{(i,j) \in E} a_{ij} = 2m \quad \text{car la somme des degrés vaut le double du nombre d'arête}$$

et les degrés sont représentés par les coefficients sur la matrice d'adjacence.

b) $\frac{2m}{p}$ représente le nombre d'arête divisé par le nombre de sommet non isolé donc ayant une arête.

ce nombre vaut au moins 1 si $p = 2$ et m vaut 1 (c'est les 2 sommets non isolés)

et ce nombre vaut au maximum $p-1$ si /

12) a) A est une matrice symétrique car elle est la matrice d'adjacence d'un graphe simple, une arête entre 2 sommets ^{et} est représentée par un coefficient 1 en position (i,j) et en position (j,i) .

d'où A est diagonalisable donc $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale

$$\text{d'où } D = P^{-1}AP$$

et D n'est pas la matrice nulle car A admet toujours comme valeur propre la somme des coefficients d'une ligne, (> 0 car $p \geq 2$)

avec comme vecteur propre associé $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
" " " " " "

on a bien $D = P^{-1} A P$ avec $D \neq 0$.

b) $\text{tr}(D)$ correspond à la somme des coefficients diagonaux de D donc à la somme des valeurs propres de A .

/

$$\text{tr}(D^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \quad \text{d'après 5)b)}$$

avec λ_k les coefficients diagonaux de $P^{-1} D^2 P$

$$\text{or } A^2 = (P^{-1} D P) A = P^{-1} D P P^{-1} D P = P D^2 P$$

les coefficients diagonaux de A^2 sont $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} a_{ji}$

/

13) a) Soit k un sommet isolé

$$E_k A = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où $E_k \in \text{Ker}(A)$.

$\text{Ker}(A)$ est composé des E_k vecteurs tels que k est un sommet isolé, or les E_k forment une famille libre car ce sont des éléments de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Donc $\dim(\text{Ker}(A))$

correspond^{au minimum} au nombre de vecteurs E_k tel que k est un sommet isolé, donc au nombre de sommet isolé.

il y a $n-p$ sommets isolés.

on a donc $\dim(\ker(A)) \geq n-p$.

si $p < n$, ie $n-p > 0$ ie il y a au moins 1 sommet isolé.

$\ker(A)$ correspond aux vecteurs propres associés à la valeur propre 0.

donc $\dim(\ker(A))$ vaut au moins $n-p$ donc le nombre de sommet isolé

donc il y a au moins $n-p$ éléments diagonaux de D correspondant au nombre de vecteurs dans la base de vecteurs propre associée à la valeur propre 0.

donc $\lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n = 0$
 $n-p$ éléments.

b) $\sum_{k=1}^p \lambda_k^2$ correspond aux p valeurs propres non nulles associées à des sommets non isolés.

on a donc $\sum_{k=1}^p \lambda_k^2 + \underbrace{\lambda_{p+1}^2 + \dots + \lambda_n^2}_{=0} = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$

puis $\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 = \text{tr}(D^2)$ d'après 51b) et 11)a)

puis on a bien $\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 = \text{tr}(D^2) = 2m$.

Copie anonyme - n°anonymat : 839772

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 20

Session : 2024

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Maths II ESSEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\theta = \max_{1 \leq k \leq n} (\lambda_k) > 0 \quad \text{car} \quad \lambda(0) = 0$$

$$\text{donc} \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k = 0$$

$$\text{et} \quad 0 \neq 0 \quad \text{donc} \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k \neq 0.$$

il existe donc au moins un $(\lambda_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$ strictement positif et un strictement négatif opposé.
il constitue donc le maximum.

$$\text{donc} \quad \underline{\theta > 0}$$

Puis, soit toujours un λ_x unique strictement positif,

$$\text{on a} \quad \sum_{k=1}^p \lambda_k^2 = \lambda_x^2 = 2m$$

$$\text{d'où} \quad \underbrace{\lambda_x}_{\theta} = \sqrt{2m}$$

et si il existe plusieurs λ_x de la sorte :

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k^2 = \lambda_x^2 + \dots + \lambda_x^2 = p \lambda_x^2 = 2m$$

$$\text{on aura} \quad \underbrace{\lambda_x}_{\theta} = \frac{1}{p} \sqrt{2m} \leq \sqrt{2m}$$

$$\text{on a bien donc} \quad \underline{\theta \leq \sqrt{2m}.}$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i^2 + x_j^2) &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i^2 + 2x_i x_j + x_j^2) \\
 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i^2 + \sum_{1 \leq i, j \leq n} 2x_i x_j + \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_j^2
 \end{aligned}$$

comme $\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$ et $\sum_{j=1}^n x_j^2 \geq 0$

on a donc $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i^2 + x_j^2) \geq \sum_{1 \leq i, j \leq n} 2x_i x_j$

on a $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j$

$$\leq \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i^2 + x_j^2)$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j^2 \\
 &\leq \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n n x_i^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j^2}_{\geq 0} \\
 &\leq \sum_{i=1}^n x_i^2 (1 + n)
 \end{aligned}$$

(il y a une erreur).

d) $\mathcal{E}(A) = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|$ } les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont réels.
 $= \sum_{k=1}^n |\lambda_k|$

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k^2 = 2m \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k^2 = 2m - \theta^2$$

$$\text{et } \left(\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k \right)^2 \leq (p-1) \left(\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k^2 \right) \\ \leq (p-1) (2m - \theta^2)$$

puis comme $\sum_{k=1}^p \lambda_k = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k + \theta$

$$\text{on a } \varepsilon(A) = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^p |\lambda_k| \right)^2} \\ \leq \theta + \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k \right)^2} \\ \leq \theta + \sqrt{(p-1)(2m - \theta^2)}$$

14) a) $Q^{-1} = ({}^t P)^{-1} = (P^{-1})^{-1} = P$

or $Q = {}^t P$ donc $P = {}^t Q$

d'où $Q^{-1} = {}^t Q$

$$A = P D P^{-1} = {}^t Q D {}^t P = \underline{{}^t Q D Q}$$

et ${}^t Y Y = {}^t (Q X) Y = {}^t X {}^t Q Y = {}^t X Q^{-1} Y$

or $Y = Q X$ donc $X = Q^{-1} Y$

on a bien ${}^t Y Y = X X$

14) b) ${}^t X A X = {}^t X {}^t Q D Q X = {}^t (Q X) D Q X = \underline{{}^t Y D Y}$

~~$$D Y = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k \\ \vdots \end{pmatrix}$$~~

$$D Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \lambda_2 y_2 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} \quad \text{car tous les coefficients de } D \text{ sont nuls sauf les diagonaux qui valent } (k,k)_{k \in 1,2}$$

$$\text{puis } {}^t Y D Y = (y_1, \dots, y_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2$$

$$c) \quad {}^t Y Y = (y_1, \dots, y_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n y_k^2$$

$$\text{on a } \lambda_k \leq 0$$

$$\text{puis } \lambda_k y_k^2 \leq 0 y_k^2$$

en sommant entre 1 et n :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2 \leq \sum_{k=1}^n 0 y_k^2$$

$${}^t X A X \leq 0 {}^t Y Y$$

$$\text{d'où } {}^t X A X \leq 0 {}^t X X$$

$$15) \quad a) \quad {}^t U A U = \sum_{k=1}^n u_k y_k^2 \quad \text{avec } u_k \text{ les coefficients de } U \\ \text{et } y_k \text{ les coefficients de } Q U = P^{-1} U.$$

les coefficients u_k valent 0 pour $k \notin I$.

$$\text{donc } {}^t U A U = \sum_{k \in I} y_k^2 = 2m.$$

(il manque des justifications).

$$\text{avec 14) c) } {}^t U A U = 2m \leq 0 {}^t U U$$

or $U U = p$ car comptabilise vaut 1 chaque fois que p n'est pas isolé

Copie anonyme - n°anonymat : 839772

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 20

Session : 2024

Épreuve de : Maths II ESSEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

d'où on a : $\frac{2m}{p} \leq \theta$

b) on a $\frac{2m}{p} \leq \theta$ donc $\frac{1}{p} \leq \frac{\theta}{2m}$ $\left. \begin{array}{l} \end{array} \right\} \sqrt{2m} \geq 0$
donc $\frac{\sqrt{2m}}{p} \leq \frac{\theta}{\sqrt{2m}}$

avec $\theta \leq \sqrt{2m}$ donc $\frac{\theta}{\sqrt{2m}} \leq 1$

on a $\frac{\sqrt{2m}}{p} \leq \frac{\theta}{\sqrt{2m}} \leq 1$

puis $m > 1$ donc $2m > 1$
donc $\sqrt{2m} > 1$

donc $\frac{\sqrt{2m}}{p} \geq \frac{1}{p}$ $\left. \begin{array}{l} \end{array} \right\} \frac{1}{p} \geq 0$

donc $\sqrt{p} \frac{\sqrt{2m}}{p} \geq \frac{1}{\sqrt{p}}$

et $\sqrt{p} \frac{\sqrt{2m}}{p} \leq \frac{\sqrt{2m}}{p}$ (pas sûr)

on a donc $\frac{1}{\sqrt{p}} \leq \frac{\sqrt{2m}}{p} \leq \frac{\theta}{\sqrt{2m}} \leq 1$

16) a) on a F dérivable sur $[0,1]$ par produit, somme et composition avec $x \rightarrow \sqrt{x}$.

$$F'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{(p-1)(1-x^2)}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{(p-1)(1-x^2)}}$$

pour $x \in [0,1]$, $1-x^2 \in [0,1]$ et $-x \in [-1,0]$

$$\text{donc } \frac{-x}{\sqrt{(p-1)(1-x^2)}} \in [-1,0]$$

avec $p-1 \geq 0$.

$$\text{puis } 1 - \frac{x}{\sqrt{(p-1)(1-x^2)}} \geq 0$$

d'où $F'(x) \geq 0$ puis F est croissante sur $[0,1]$.

$$17) a) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \text{ on a } \text{rg}(A - I_n) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & & \\ 1 & \dots & & & 1 \end{pmatrix}\right) = 1.$$

car toutes les colonnes sont identiques

puis avec le théorème du rang :

$$\underline{\dim \text{Ker}(A - I_n) = n - 1}$$

donc le sous-espace propre associé est de dimension $n-1$.

avec $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

on a $AX = \begin{pmatrix} n-1 \\ n-1 \\ \vdots \\ n-1 \end{pmatrix} = (n-1)X$

donc $n-1 \in Sp(A)$.

$\varepsilon(A) = \varepsilon(n-1)$ (on admet)

on remplace dans (1).

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n} + \frac{1}{n} \sqrt{(n-1)^2 \frac{n(n-1)}{2} \left(p^2 - 2 \frac{n(n-1)}{2}\right)} \\ &= n-1 + \frac{1}{n} \sqrt{(n-1)^2 n(n-1) (n^2 - n(n-1))} \\ &= n-1 + \frac{1}{n} \sqrt{(n-1)^2 (n^3 - (n^2 n - n))} \\ &= n-1 + \frac{1}{n} \sqrt{n^3(n-1)^2 - n^2(n-1)^3} \\ &= n-1 + \frac{n(n-1)}{n} \\ &= 2(n-1). \end{aligned}$$

l'inégalité (1) est une égalité

18) ~~def deg Max(A) :~~

~~$a = 0$~~

~~$b = A[0,0]$~~

~~while $b < a$:~~

$$19) a) \quad |\lambda_j|(\alpha + \beta) = \alpha |\lambda_j| + \beta |\lambda_j|$$

=

19) b) on somme des deux côtés :

$$\sum_{j=1}^p |\lambda_j|(\alpha + \beta) \geq \sum_{j=1}^p \lambda_j^2 + \alpha\beta \quad \left) \quad \sum_{j=1}^p \lambda_j^2 + \underbrace{\sum_{j=1}^p \alpha\beta}_{p \times \beta}$$

d'où $(\alpha + \beta) \mathcal{E}(A) \geq \text{tr}(A^2) + p\alpha\beta$

d'où $\mathcal{E}(A) \geq \frac{\text{tr}(A^2) + p\alpha\beta}{(\alpha + \beta)} = \frac{2m + p\alpha\beta}{\alpha + \beta}$

ici $\text{tr}(A^2) = \sum_{j=1}^p \lambda_j^2 = \sum_{j=1}^p \lambda_j = 2m$ (S) b) et 13) b)

car 13) a) $\lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

19) c) on dérive φ sur $\mathbb{R}^+$ (dérivable car produit et somme).

$$\varphi'(t) = \frac{bt(b+t) - (a+bt)}{(b+t)^2} = \frac{b^2t + bt^2 - a - bt}{(b+t)^2}$$

$$= \frac{bt(b+t-1) - a}{(b+t)^2}$$

$(b+t)^2 > 0$ on étudie $bt(b+t-1) - a$

20) c) $m = 1$.