



P3-00316
520197
Mat Appro

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 28

Session : 2024

Épreuve de : Maths appro ED4 EC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

exercice 1

la rg $J_n = 1$ car toutes ses colonnes sont égales et non-nulles.

le théorème du rang donne : $\dim(\text{Ker}(J_n)) \leq n$

donc 0 est valeur propre et $\dim \text{Ker } J_n = n-1$

① $J_n v_n = \begin{pmatrix} n \\ 1 \\ n \end{pmatrix} = n v_n$. donc comme $v_n \neq 0$
 v_n vecteur propre

② $\dim \text{Vect}(v_n) = 1$

donc $\dim(\text{Vect}(v_n)) + \dim(\text{Ker}(J_n)) = n = \dim \mathbb{R}^n$

donc 0 est n fois valeur propre

② f_n est une fonction polynomiale de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.

3a) $\forall i \in \mathbb{I}; n\}$:

$$\partial_i f_n(\mathbf{u}) = \frac{2}{n} x_i - \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n x_k.$$

④ $\partial_i f_n(\mathbf{u}) = 0 \Rightarrow x_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \quad \forall i \in \mathbb{I}; n\}$

$$\Rightarrow x_i = x_j \quad \forall (i, j) \in \mathbb{I}; n\}^2.$$

$$\Rightarrow x_i = 1 \quad \forall i \in \mathbb{I}; n\}$$

dans les points critiques on a de la forme $(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$

4a) $\partial_{i,i} f_n(\mathbf{u}) = \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} \quad \forall i \in \mathbb{I}; n\}$

$$\partial_{i,j} f_n(\mathbf{u}) = -\frac{2}{n^2} \quad i \neq j \quad \forall (i, j) \in \mathbb{I}; n\}^2$$

$$\textcircled{b} \quad \nabla^2 f_n(a-a) = \frac{2}{n^2} \begin{pmatrix} n-1 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & n-1 \end{pmatrix} = \frac{2}{n^2} (nI_n - J_n)$$

$\textcircled{c} \quad n = \text{int}(\text{input}('entrez la valeur de n: '))$
 $I = \text{np.eye}(n)$
 $J = \text{np.ones}(n, n)$
 $\text{Hessienne} = (2/n^2 + 2) * (n * I - J)$
 print Hessien

$\textcircled{d}$ La Hessienne est symétrique donc diagonalisable.

Soit λ valeur propre et X un vecteur associé.

$$\frac{2}{n^2} (nI_n - J)X = \lambda X.$$

$$\text{ie } \frac{2}{n^2} nX - \lambda X = JX \times \frac{2}{n^2}$$

$$\text{ie } \left(n - \frac{\lambda n^2}{2}\right) X = JX \text{ donc } n - \frac{\lambda n^2}{2} = 0$$

$$\text{ou } n - \frac{\lambda n^2}{2} = n$$

$$\text{ie } \frac{\lambda n^2}{2} = 0$$

$$\text{ie } \lambda = 0$$

$$\text{ie } n = \frac{\lambda n^2}{2}$$

$$\text{ie } \frac{2}{n} = \lambda.$$

Donc ses 2 valeurs propres sont 0 et $\frac{2}{n}$.

On ne peut pas savoir car elles ne sont pas toutes 2 strictement supérieures à 0.

5a) Par Cauchy-Schwarz: $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\left(\sum_{k=1}^n 1 \cdot x_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n 1^2 \sum_{k=1}^n x_k^2$$

b) On a $f_n(x) x_n^2 \geq 0$ donc $f_n(x) \geq 0$.

$$\text{Or, } f_n(a - a) = \frac{1}{n} \times 1 - \left(\frac{1}{n} x_n \right)^2 = 0$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f_n(x) \geq f_n(a - a)$

donc f_n atteint un minimum global en a
et ce minimum est atteint en chaque
point critique de f_n .

6a) def $f - z(x, y)$:

$$z = (1/2) + (x^2 + y^2) - ((1/2) +$$

$$(z + y)) + 2$$

return z.

Copie anonyme - n°anonymat : 520197

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 28

Session : 2024

Épreuve de : EDNEC Maths approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

② Surface 1 car elle admet un minimum en 0.

Exercice 2.

① a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}:$
 $\arctan'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{1+x^2}$

donc $\arctan'\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan'(x) = 0$

donc $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan(x) = K$ avec $K \in \mathbb{R}$.

on, $\arctan(1) + \arctan(1) = 2 \times \frac{\pi}{4}$
 $= \frac{\pi}{2}$

$= K$ donc $K = \frac{\pi}{2}$

③ $\arctan(x) \underset{0}{\sim} \arctan(0) + x \arctan'(0) + o(x)$
 $\underset{0}{\sim} x + o(x)$

donc
 $\arctan(x) \underset{0}{\sim} x$

(2a)

On a $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(-x)$ et f continue sur $\mathbb{R}$.On a $\frac{2}{\pi(e^x + e^{-x})} \times x^2 \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ par croissance comparée

$$\text{car } \frac{2}{\pi(e^x + e^{-x})} \sim \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{e^x}$$

$$\text{et } \frac{x^2}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

$$\text{donc } \frac{2}{\pi(e^x + e^{-x})} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Or, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge donc par négligéabilité:

$$\int_1^{\infty} \frac{2}{\pi(e^x + e^{-x})} dx \text{ aussi.}$$

donc par parité $\int_{-\infty}^{-1} \frac{2}{\pi(e^x + e^{-x})} dx$ aussi.

$$\text{Donc } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \text{ aussi.}$$

(b) • f continue sur $\mathbb{R}$ • f paire sur $\mathbb{R}$.

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\operatorname{arctan}(e^x) \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right)$$

$$= 1 \quad \text{donc } f \text{ densité.}$$

$$\textcircled{3} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \arctan(e^t) dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \arctan(e^2)$$

④ F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de la bijection donne que F admet
une bijection de $\mathbb{R}$ dans $F(\mathbb{R}) =]0; 1[$.

⑤ Il existe une loi uniforme tel que $U \sim]0; 1[$
can définie par $F(X)$

⑥

$$\text{Poser } y \in]0; 1[\text{, } \forall x \in \mathbb{R} : y = \frac{2}{\pi} \arctan(e^x)$$

$$\text{ie } \frac{\pi}{2} y = \arctan(e^x)$$

$$\text{ie } \ln(\tan(\frac{\pi}{2} y)) = x$$

$$\forall x \in]0; 1[: F^{-1}(y) = \ln(\tan(\frac{\pi}{2} y)).$$

def simml X():
return np.log(np.tan((np.pi/2)*np.random(1)))

⑤a en fait de même qu'el 2a mais ci:

$$\frac{2}{\pi} \frac{x}{e^x + e^{-x}} \times x^2 \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{croissance comparées})$$

$$\text{donc } \frac{2}{\pi} \times \frac{x}{e^x + e^{-x}} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\text{donc } \int_1^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{x}{e^x + e^{-x}} dx \text{ converge}$$

par paires et continuité $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ converge.

$$\text{Or, } -x f(x) = -x f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{donc par imparité, } \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = 0.$$

$$\underline{E(X) = 0}$$

$$\textcircled{b} \text{ de même: } \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{e^x + e^{-x}} \times x^2 \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{croissance comparées})$$

on déduit que par paires et continuité:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx \text{ converge.}$$

donc X a une espérance.

Copie anonyme - n°anonymat : 520197

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 28

Session : 2021

Épreuve de : Edhec

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6a) On pose $v = nt$ fonction bijective C^1 sur $\mathbb{R}^+$
 donc $dv = n dt$
 on a $A > 0$: $\int_0^A t^2 e^{-nt} dt = \int_0^{nA} \left(\frac{v}{n}\right)^2 e^{-v} \frac{dv}{n}$

on a $t^2 e^{-nt} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ par croissance comparée

donc $t^2 e^{-nt} = o\left(\frac{1}{t}\right)$

donc par négligeabilité
 et continuité: $\int_1^\infty t^2 e^{-nt} dt$ converge

$$= \frac{1}{n^3} \int_0^{nA} v^2 e^{-v} dv \xrightarrow{A \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \Gamma(3)$$

$$= \frac{1}{n^3} \times 2!$$

$$= \frac{1}{n^3} \times 2.$$

b)

on a par somme d'intégrales convergentes:

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k \int_0^\infty t^2 e^{-(2k+1)t} dt$$

$$= \int_0^\infty t^2 e^{-t} \times \sum_{k=0}^p (-1)^k \times (e^{-2t})^k dt$$

$$= \int_0^\infty t^2 e^{-t} \times \frac{1 - (-e^{-2t})^{p+1}}{1 + e^{-2t}} dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{t^2 e^{-t}}{1 + e^{-2t}} dt + \int_0^\infty \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} dt$$

$= I$

$$\textcircled{c} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ : 0 \leq \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} \leq t^2 e^{-(2p+3)t}.$$

$$\text{donc } 0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} dt \leq \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2p+3)t} dt \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

par encadrement: $\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} dt \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$

$$\textcircled{d} \quad E(X^2) = \frac{1}{\pi} = \frac{\pi}{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t} dt \right)$$

↑
parité

en remplaçant et utilisant la $\textcircled{c}$.

$$\uparrow \text{ car } |(-1)^k| \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2k+1)t}}{1+e^{-2t}} dt \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \times \frac{2}{(2k+1)^3} \right)$$

$$= \frac{\pi^3}{32}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \xrightarrow{\textcircled{c}} 0$$

$$= \frac{\pi^3}{32}$$

① ② ③

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(Y \leq x) = P(e^X \leq e^x) \\ = P(X \leq \ln(x)) \quad \text{par stricte } \Gamma \text{ de la fonction.}$$

$$\text{donc } G(x) = \begin{cases} F(\ln(x)) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \arctan(\ln(x)) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

G est continue sur $\mathbb{R}$, positive sur $\mathbb{R}$

$$\text{et } \int_{-\infty}^{+\infty} G'(x) dx = \left[\frac{2}{\pi} \arctan(\ln(x)) \right]_{-\infty}^{+\infty} \\ = 1$$

donc Y variable aléatoire à densité

$$\textcircled{b} P(M_n \leq x) = P\left(\bigcap_{i=1}^n Y_i \leq x\right)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad = \prod_{i=1}^n P(Y_i \leq x) \quad \text{indépendance des } Y_1, \dots, Y_n$$

$$= \prod_{i=1}^n P(Y_i \leq x) \quad \text{même loi}$$

$$= (G(x))^n$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi} \arctan(\ln(x))\right)^n & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\textcircled{a} P\left(\frac{n}{M_n} \leq x\right) = P\left(\frac{n}{x} \leq M_n\right)$$

car

$$= 1 - P\left(M_n < \frac{n}{x}\right)$$

$$= \begin{cases} 1 - \left(\frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{n}{x}\right)\right)^n & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on a $\arctan\left(\frac{n}{x}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi}{2} - \frac{x}{n}$

$$\frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{n}{x}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 1 - \frac{2}{\pi} \times \frac{x}{n}$$

$$\text{donc } \left(\frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{n}{x}\right)\right)^n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\frac{2x}{\pi}}$$

donc $\left(\frac{n}{M_n}\right)$ converge en loi vers une variable

de fonction de répartition :

$$\begin{cases} 1 - e^{-\frac{2x}{\pi}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc converge en loi vers $Z \rightsquigarrow \mathcal{E}\left(\frac{2}{\pi}\right)$

Copie anonyme - n°anonymat : 520197

Emplacement QR Code	Code épreuve : 297	Nombre de pages : 28	Session : 2024
	Épreuve de : Edhec maths approfondies		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

exercice 3

$$\forall (x, y) \in E^2: \langle f(x)/y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle v_i/x \rangle v_i / y \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle v_i/x \rangle \langle v_i/y \rangle$$

$$= \langle x / f(y) \rangle.$$

endomorphisme symétrique de E

② $f(x) = \sum_{i=1}^p \langle v_i/x \rangle v_i$ c'est le projecteur orthogonal sur $(v_1 - v_p)$

③a) $x \in \text{Ker } f: f(x) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle v_i/x \rangle v_i = 0$

$\Rightarrow \lambda_i \langle v_i/x \rangle = 0 \quad \forall i \in \{1, p\}$

$\Rightarrow \langle v_i/x \rangle = 0 \quad \forall i \in \{1, p\}$

$\Rightarrow x \in (\text{Vect}(v_1 - v_p))^\perp$

orthogonale donc libre.

donc $U = p$ donc $\dim \text{Ker } f = \dim E - p$

② par théorème du rang :

$$\underline{\text{rg}(f) = p}$$

$$\text{car, } U \in \text{Im} f \text{ donc } \underline{V = \text{Im} f.}$$

$$\textcircled{1} \forall j \in \{1, p\} : \overbrace{f(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle v_i | x \rangle v_i}^{\text{soit } x \in \text{vect}(U_j)} \quad \begin{matrix} \text{famille} \\ \text{(car } V \text{ orthogonale)} \end{matrix} \\ = \lambda_j x$$

Or, $\text{vect}(U_j) \neq 0$ donc $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ valeurs propres associées à $\text{vect}(U_j)$ chacune.

Partie 2.

⑤ supposons que (y_n) n'est pas bornée de E

considérons x et y de E :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x\| = 0.$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n - y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n - x$$

$$\underline{\text{donc } x = y.} \quad \underline{y \text{ est unique.}}$$

⑥ $K \leq 1$

$\forall x \in E,$

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \langle u_i, x \rangle^2 \text{ par Pythagore.}$$

Cauchy-Schwarz donne:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \langle u_i, x \rangle^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^p \lambda_i^2} \times \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^p \langle u_i, x \rangle^2}}_{\|p_U(x)\|}$$

or, $\|p_U(x)\| \leq \|x\|$

car $\|x - p_U(x)\|^2 \geq 0$

$$\|x - p_U(x) + p_U(x)\|^2 = \|x\|^2 = \|p_U(x)\|^2 + \|x - p_U(x)\|^2 \quad (\text{car } \langle p_U(x), x - p_U(x) \rangle = 0)$$

$$\|x - p_U(x) + p_U(x)\|^2 = \|x\|^2 = \|p_U(x)\|^2 + \|x - p_U(x)\|^2$$

donc $\|x\|^2 \geq \|p_U(x)\|^2$ donc $\|x\| \geq \|p_U(x)\|$

donc $\|f(x)\| \leq K \times \|x\|$.

⑦ Posons $P_n: \|x_n\| \leq K^n \|x_0\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Initialisation: $n=0, \|x_0\| \leq \|x_0\|$
 Raisonné.

Hypothèse: supposons P_n vraie et un $n \in \mathbb{N}$.

on a $\|f(x_n)\| \leq K \|x_n\|$

dans par hypothèse: $\|x_n\| \leq K^n \|x_0\|$

ie $\|f(x_n)\| \leq K \times \|x_n\| \leq K^{n+1} \|x_0\|$

ie $\|x_{n+1}\| \leq K^{n+1} \|x_0\|$

P(n+1) vraie.

Conclusion: P(n) vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

⑥ on a $K^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ car $0 < K < 1$

dans par conséquent, $\|x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

ie $\|x_n - 0\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Suites converge vers 0.

⑦ on a $\sum_{n=0}^{\infty} K^n \|x_0\| = \frac{1}{1-K} \times \|x_0\|$

dans par conséquent, $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$ converge.

Copie anonyme - n°anonymat : 520197

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 294

Nombre de pages : 28

Session : 2024

Épreuve de : EDHEC approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème

Partie 1 :

$$\forall t \in [0; 1] : \frac{1}{(1+t^2)^n} > 0$$

$$\text{donc } \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt > 0$$

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \left(\frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} - \frac{1}{(1+t^2)^n} \right) dt$$

$$= \int_0^1 \frac{-t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt$$

$$\text{or, } \frac{-t^2}{(1+t^2)^{n+1}} \leq 0 \quad \forall t \in [0; 1]$$

$$\text{donc } u_{n+1} - u_n \leq 0$$

Ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante et positive.

② $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante et minorée

donc converge.

2a)

posons $g(x) = 1 + x - e^{\frac{x}{2}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$$

$$\text{on a } 1 - \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} > 0$$

$$\text{ie } 2 > e^{\frac{x}{2}}$$

$$\text{ie } 2\ln(2) > x.$$

donc g croissante sur $]0, 2\ln(2)[$.

$$\text{avec } g(0) = 0$$

donc $g(0) \leq g(x) \quad \forall x \in [0, 1]$

$$\text{ie } e^{\frac{x^2}{2}} \leq 1+x$$

① $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\forall t \in [0, 1]$:

$$\frac{1}{(1+t)^n} \leq e^{-\frac{nt^2}{2}}$$

ie $\frac{1}{(1+t)^n} \leq e^{-\frac{nt^2}{2}}$ par suite comme de $x \mapsto x^n$
sur $[0, 1]$ car $n \geq 1$.

$$\text{donc } u_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^n} dt \leq \int_0^1 e^{-\frac{nt^2}{2}} dt.$$

$$\underline{n=0:} \quad \int_0^1 e^0 dt = \underline{1} \geq u_0$$

② $g(x) = e^{-\frac{nx^2}{2}} = g(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

$$\text{on a } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{nt^2}{2}} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{nt^2}{2}} dt$$

posons $v = \frac{nt^2}{2}$ une fonction bijective C^1 sur $\mathbb{R}^+$

$$dv = t n dt \quad \text{et } t = \sqrt{\frac{2v}{n}}$$

avec Abs.

$$2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{nt^2}{2}} dt = 2 \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{v}} e^{-v} \frac{dv}{n}$$

$$= \frac{\sqrt{2n}}{n} \int_0^{\frac{n+2}{2}} \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-u} du$$

$$\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2n}}{n} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{n} \pi.$$

① donc par encadrement, comme $\frac{\sqrt{2}}{n} \pi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 on a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$

$$\text{donc } \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

par encadrement, on $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

La limite de l'intégrale est 0.

Partie II: $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

$$\text{on a } \frac{1}{(1+t^2)^n} \sim \frac{1}{t^{2n}}$$

On $2n > 2 > 1$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}} dt$ converge

Par équivalence, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ converge

Copie anonyme - n°anonymat : 520197

Emplacement QR Code	Code épreuve : 292	Nombre de pages : 28	Session : 2024
	Épreuve de : EDUEC math approfondies		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Ainsi, $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t)^n} dt$ converge

(4a) $\forall t \geq 1 : 0 \leq \frac{1}{(1+t)^n}$ donc $0 \in I_n$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+t)^n} &\leq \frac{1}{t^n} \quad \text{on, } \int_1^{\infty} \frac{1}{t^n} dt \\ &= \left[\frac{t^{-n+1}}{-n+1} \right]_1^{\infty} \\ &= \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

donc $0 \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{(1+t)^n} dt \leq \frac{1}{n-1}$

(b) $\frac{1}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

par encadrement, $I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

$$c) \quad J_n = I_n + u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

donc $J_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

$\textcircled{5a)}$ ^{à nouveau} posons u et v 2 fonctions C^1 sur $\mathbb{R}^+$

$$u(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n} \quad v(t) = t$$

$$u'(t) = \frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}} \quad v'(t) = 1.$$

Or sur $A)0$: $\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = \int_0^A \frac{2n+2}{(1+t^2)^{n+1}} dt + \left[\frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^A$

$$= 2n \int_0^A \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^{n+1}} dt + \left[\frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^A$$

$$= 2n \left(\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n} dt - \int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt \right) + \left[\frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^A$$

$$\xrightarrow{\text{A} \rightarrow \infty} 2n (J_n - J_{n+1}) \quad \xrightarrow{\text{A} \rightarrow \infty} \textcircled{0}$$

donc $J_n = 2n (J_n - J_{n+1})$

b)

$$J_1 = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+r^2} dr$$

$$= \left(\arctan(r) \right)_0^{\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$\textcircled{a} \text{ NP: } \sum_{n=1}^N \frac{J_n}{n} = 2 \sum_{n=1}^N (J_n - J_{n+1})$$

$$= 2 (J_1 - J_{N+1}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 2J_1 = \pi$$

done $\sum_{n=1}^N \frac{J_n}{n} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \pi$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n}{n}$ converge vers π

$\textcircled{a}$ def scrib $J(n)$:

$$J = np \cdot \pi / 2$$

for k in $\text{range}(2, n+1)$:

$$J = ((2k-1)/(2k)) * J$$

return J .

$$\left(\begin{aligned} \text{can } J_n &= 2n(J_n - J_{n+1}) \\ \Rightarrow J_{n+1} &= \frac{2n-1}{2n} J_n \end{aligned} \right)$$

⑥ Posons $P_n: \forall J_{n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n)!}{4^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Initialisation: $n=0$, $J_1 = \frac{\pi}{2}$ P_0 vraie

Hérédité: supposons P_n vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.
(généraliser à $J_{n+1} = J_{n+2}$)

$$J_{n+1} \times \frac{2n+1}{2(n+1)} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{4^n} \times \frac{2n!}{n!n!} \times \frac{2n-1}{2n}$$

$$J_{n+2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{4^{n+1}} \times \frac{2}{(n+1)} \times (2n+1) \times \frac{2n!}{n!2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{4^{n+1}} \times \frac{2(2n+1)}{(n+1)} \times \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \times \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+1)}$$

$$J_{n+2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{4^{n+1}} \times \frac{(2n+2)!}{(n+1)!}$$

P_{n+1} vraie.

Conclusion: P_n vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Copie anonyme - n°anonymat : 520197

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 28

Session : 2024

Épreuve de : Edhec

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 3.

$n \in \mathbb{N}^*$, (7a) X_n compte le nombre de pile
lors de $2n$ lancers avec une pièce
équilibrée donc on
a déduit que : $X_n \sim \mathcal{B}(2n, \frac{1}{2})$

(b) La probabilité que X_n soit égale à Y_n est
qu'il y a eu autant de pile que de face
(c'est-à-dire n fois)

$$\begin{aligned} \text{Donc } P(X_n = Y_n) &= \frac{1}{2^{2n}} \times \frac{1}{2^n} \times \binom{2n}{n} \\ &= \frac{1}{4^n} \times \binom{2n}{n} \\ &= \frac{2}{\pi} \times J_{n+1} \end{aligned}$$

b) $J_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

donc $P(X_n = J_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

c) Comme $X_n \sim B(2n, \frac{1}{2})$ et $J_n \sim B(2n, \frac{1}{2})$

et bien $P(X_n < J_n) = P(X_n > J_n)$

car cela revient au même du fait de leurs lois.

d) $P(X_n < J_n) = 1 - P(X_n \leq J_n)$

$= 1 - P(X_n = J_n) - P(X_n < J_n)$

ie $2P(X_n < J_n) = 1 - P(X_n = J_n)$

ie $P(X_n < J_n) = \frac{1 - P(X_n = J_n)}{2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{2}$

8a) X_n compte le nombre de piles au cours des $2n$ lancers

donc si Z_k prend la valeur 1 si pile est obtenue au k ième

lancer et 0 sinon alors : $X_n = \sum_{k=1}^{2n} Z_k$

on peut vérifier que si $(X_n = i)$ est réalisé

alors $(Z_n = 1)$ est réalisé i fois

et $(Z_n = 0)$ $2n - i$ fois.

Et réciproquement.

$$\textcircled{b} \quad \bar{Z}_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} Z_k.$$

$$E(\bar{Z}_n) = \frac{2n}{2n} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$V(\bar{Z}_n) = \frac{1}{4n^2} \times 2n \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8n}$$

$$Z'_n = \sqrt{8n} \times (\bar{Z}_n - \frac{1}{2})$$

Le théorème limite centrale donne :

$$Z'_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X \sim N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} \bullet P(X_n \leq y_n) &= P\left(\sum_{k=1}^{2n} Z_k \leq y_n\right) \\ &= P\left(\bar{Z}_n \leq \frac{1}{2n} y_n\right) \\ &= P\left(\sqrt{8n} (\bar{Z}_n - \frac{1}{2}) \leq \underbrace{\sqrt{8n} \left(\frac{1}{2n} y_n - \frac{1}{2}\right)}_{y'_n}\right) \\ &= P(Z'_n \leq y'_n) \end{aligned}$$

~~théorème~~

$$\text{Or, } \forall \omega \in \Omega, \sqrt{n} \left(\frac{1}{2n} Y_n(\omega) - \frac{1}{2} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\text{donc } P(Z_n' \leq Y_n') \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} P(X \leq 0) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ainsi, } P(X_n \leq Y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{2}.$$

$$\textcircled{c} P(X_n < Y_n) = \underbrace{P(X_n \leq Y_n)}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{2}} - \underbrace{P(X_n = Y_n)}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0}.$$

$$\text{donc } P(X_n < Y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{2}.$$