

Copie anonyme - n°anonymat : 520197



P3-00316
520197
Mat2 Appro

Code épreuve : 283

Nombre de pages : 26

Session : 2024

Épreuve de : Maths 2

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\begin{aligned} (a) \quad \forall x \in \mathbb{R} : F_{(n,n)}(x) &= P(X_{(n,n)} \leq x) \\ &= P(\max_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i \leq x) \\ &= P(\bigcap_{i=1}^n (X_i \leq x)) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) \quad \text{par indépendance} \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) \quad \text{car suivent la même loi} \\ &= P(X_1 \leq x)^n \\ &= (F(x))^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

F est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$\underline{F_{(n,n)}'(x) = n x f(x) F(x)^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*}$$

$$\textcircled{b} F_{(n,1)}(x) = P(X_{(n,1)} \leq x)$$

$$= P(\min_{1 \leq i \leq n} X_i \leq x)$$

$$= 1 - P(\min_{1 \leq i \leq n} X_i > x)$$

$$= 1 - P(\bigcap_{i=1}^n (X_i > x))$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i > x) \quad \text{indépendance}$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(X_i \leq x))$$

$$= \underline{1 - (1 - F(x))^n} \quad \begin{array}{l} \text{même loi} \\ \uparrow \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{array}$$

en dérivant...

$$\underline{f_{(n,1)}(x) = n f(x) (1 - F(x))^{n-1}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{2a} P(Y_{i,x} = 1) = P(X_i \leq x)$$

$$= F(x)$$

$$\text{et } P(Y_{i,x} = 0) = 1 - F(x).$$

$$\text{donc } \underline{Y_{i,x} \sim B(1, F(x))}$$

⑥ • $\omega \in (X_{n,k} \leq x)$:

alors au moins la k ième valeur est en dessous
de x donc les $k-1$ avant aussi

or, si $X_i(\omega) \leq x \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$

alors d'après la 2a on a $Y_{i,x}(\omega)$ qui est
égal au moins k fois à 1 :

$$\text{donc } \sum_{i=1}^n Y_{i,x}(\omega) \geq \sum_{i=1}^k 1 = k$$

• $\omega \in \left(\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq k \right)$:

alors $Y_{i,x}(\omega)$ prend au moins k fois la valeur 1

ce qui signifie que $X_i^{(w)} \leq x$ ~~au moins~~ k fois

donc que au moins les k premières valeurs
sont inférieures à x :

$$\text{ie: } \underline{X_{n,k}(\omega) \leq x}$$

• il y a égalité.

$$\textcircled{C} \quad P\left(\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq k\right) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} F(x)^i (1-F(x))^{n-i} = F_{(n,k)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

car
supérieur à k .

car la 2a comme Bernouilli

d'après
la 5a.

$$(3) \quad \forall z \in \mathbb{R}, \forall l \in \mathbb{Z}; n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

(a) $b_{n,l}$ polynôme dans $\mathbb{R}[z]$:

$$\begin{aligned} b_{n,l}'(z) &= l \binom{n}{l} z^{l-1} (1-z)^{n-l} - (n-l) \binom{n}{l} z^l (1-z)^{n-l-1} \\ &= n \binom{n-1}{l-1} z^{l-1} (1-z)^{n-l} - n \binom{n-1}{l} z^l (1-z)^{n-l-1} \\ &= n (b_{n-1,l-1}(z) - b_{n-1,l}(z)) \end{aligned}$$

(b) $a_{n,n}$ polynôme, divisible par n .

$$\begin{aligned} a_{n,n}'(z) &= \sum_{l=k}^n b_{n,l}'(z) \\ &= n \left(\sum_{l=k}^n b_{n-1,l-1}(z) - \sum_{l=k}^n b_{n-1,l}(z) \right) \\ &= n (b_{n-1,k-1}(z) - b_{n-1,n}(z)) \\ &= n \binom{n-1}{k-1} z^{k-1} (1-z)^{n-k} \\ &= \text{---} \end{aligned}$$

$$= n b_{n-1,k-1}(z) \quad \text{donc } m=n-1 \text{ et } l=k-1$$

(c) On reprend le (b) et on utilise notre résultat précédent. Sauf que l'on remplace les z par des $F(x)$

$$\begin{aligned} \text{donc } F_{n,n}'(x) &= n \times f(x) \times b_{n-1,k-1}(F(x)) \\ &= n \binom{n-1}{k-1} f(x) F(x)^{k-1} (1-F(x))^{n-k} \end{aligned}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 520197

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 283

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : 10/12

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

(4a) $F(x) < \alpha < 1$

$\varepsilon > 0, \alpha - F(x) > \varepsilon.$

Si $\omega \in \left[\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq \lfloor \alpha n \rfloor \right)$

alors $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x}(\omega) \geq \lfloor \alpha n \rfloor \frac{1}{n}$

ie $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x}(\omega) - F(x) \geq \frac{\lfloor \alpha n \rfloor - F(x)}{n}$

pour un n très grand, $\frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n}$ et $\frac{\alpha n}{n}$ sont très proches

donc on a $\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x}(\omega) - F(x) \right| \geq \frac{\alpha n}{n} - F(x) > \varepsilon$

On rappelle que $E(Y_{i,x}) = F(x)$

Ces $Y_{i,x}$ sont tous la même loi donc les v.a.s. indépendantes

Ce loi faible des grands nombre donne:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} F(x)$$

donc $P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) \right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$

Par encadrement, on a eu très grand :

$$P\left(\sum_{i=1}^n Y_{i,n} \geq L(n)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Donc on reprend la 2b :

$$F_{(n, L(n))}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$$\textcircled{b} \quad 0 < \alpha < F(x) \quad \varepsilon > 0, F(x) - \alpha > \varepsilon.$$

$$\bullet \omega \in \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,n} - F(x) \right| < \varepsilon.$$

$$\text{ie} \quad -\varepsilon < \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,n}^{(\omega)} - F(x)$$

$$\text{ie} \quad \alpha < F(x) - \varepsilon < \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,n}^{(\omega)} - F(x)$$

$$\text{ie} \quad \underline{q_n} \leq \alpha_n < \sum_{i=1}^n Y_{i,n}^{(\omega)} + F(x)$$

En passant aux probabilités :

$$1 \geq P\left(\sum_{i=1}^n Y_{i,n} \geq \underline{q_n}\right) \geq 1 - P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,n} - F(x)\right| \geq \varepsilon\right)$$

d'après 2b.

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\text{par encadrement, } F_{(n, \underline{q_n})}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

5a) f est continue sur I et strictement positive donc
 f strictement croissante sur I .

$$\text{on } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \text{ et } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$$

f est donc continue sur I , strictement croissante, le théorème
de la bijection donne que f admet une bijection

de I dans $f(I) =]0; 1[$.

6

⑥

```
def tri(T):
    k=0
    i=1
    while T[s-1] != max T:
        while T[k] < T[i]:
            i=i+1
            k=k+1
        a = T[i]
        T[i] = T[k]
        T[k] = a
    return T
```

⑦ a) def X(n, n):
 res = ech(n)
 y = tri(res)
 return y[k-1]

⑧ Ils représentent les valeurs prises par les X_i ~~dans~~ dans l'ordre croissant.

⑨ A priori:

$$P(X_i \leq 7,5) = 1$$

$$P(X_i \leq 4,75) = 0,6$$

$$P(X_i \leq 5) = 0,8$$

$$P(X_i \leq 3,5) = 0,4$$

$$P(X_i \leq 2,75) = 0,2$$

donc $2 \leq X_i \leq 6$ presque sûrement.

Copie anonyme - n°anonymat : 520197

Emplacement QR Code	Code épreuve : 283	Nombre de pages :	Session : 2024
	Épreuve de : Math2		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

~~$= 2 + 0,25 = 2,25$~~

① Supposons que les X_i suivent une loi notée σ

def ech (n):
return np. σ (n)

Cauni
sur Python.
notée np. σ .

Partie II.

Posons $P(n) : "S_n$ suit une loi de densité $g_{n,1}" \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

Initialisation: $n=1: S_1 \sim \mathcal{E}(n\lambda)$

donc $f_{S_1}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$= g_{n,1}(x)$.

donc $P(1)$ vraie.

9/26

Hérédité: supposons P_k vraie et on $k \in \mathbb{I}(n-1)$.

• Le lemme des noyaux assure que S_k et T_{k+1}

sont indépendantes. On pose $Z = S_k + T_{k+1}$

• On sait que la densité de T_{k+1} est donnée par $T_{k+1} \sim \mathcal{E}((n-k)2)$

• Par produit de convolution:

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$f_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{n,k}(t) f_{T_{k+1}}(x-t) dt$$

$$= \int_0^x n \binom{n-1}{k-1} 2 e^{-2(n-k+1)t} (1-e^{-2t})^{k-1} 2x e^{-(n-k)2(x-t)} dt$$

car
 $t \geq 0$
 et $x-t \geq 0$
 donc $x \geq 0$

$$= \int_0^x \binom{n}{k-1} \dots$$

on suppose que Z suit bien $g_{n,k+1}$

donc P_{k+1} vraie.

Conclusion: P_k vraie $\forall k \in \mathbb{I}(n)$.

$$\textcircled{b} f_{n,k}(t) = \begin{cases} n \binom{n-1}{k-1} \lambda e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{n-k} (e^{-\lambda t})^{k-1} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d'après
la

$\textcircled{3c}$

$$= \begin{cases} n \binom{n-1}{k-1} \lambda e^{-\lambda(n-k+1)t} (1 - e^{-\lambda t})^{n-k} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$= g_{n,k}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$\textcircled{9}$

Calculer une espérance et une variance par somme de variables suivant des lois exponentielles.

$$\text{donc } E(X_{n,k}) = E(S_k) \rightsquigarrow = E\left(\sum_{i=1}^k T_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^k \frac{1}{(n-i+1)\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^k \frac{1}{n-i+1}$$

$$V(X_{n,k}) = V(S_k)$$

$$= \sum_{i=1}^k V(T_i) \quad \text{par indépendance}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{(n-i+1)^2}$$

(10a) $j \geq 1$ et $j \leq x \leq j+1$

donc $x_j \neq 0$.

on a $x - j \geq 0$

$$\text{ie } \frac{x-j}{x_j} \geq 0.$$

$$\text{ie } \frac{1}{j} - \frac{1}{x} \geq 0.$$

• anniposons: $(x^2 - jx - 2j) = 0$

$$\Delta = j^2 + 8j \quad x_1 = j \frac{-j - \sqrt{j^2 + 8j}}{2} < j$$

$$x_2 = j \frac{-j + \sqrt{j^2 + 8j}}{2} > \frac{2j+2}{2} = j+1$$

donc $\forall x \in (j; j+1)$, $x^2 - jx - 2j \leq 0$

donc $x(x^2 - jx - 2j) \leq 0$

$$\text{ie } x^3 - jx^2 - 2xj \leq 0$$

$$\text{ie } x^3 - jx^2 \leq 2xj$$

$$\text{ie } 1 - \frac{j}{x} \leq \frac{2j}{x^2} \quad \text{car } x \neq 0$$

$$\text{ie } \frac{1}{j} - \frac{1}{x} \leq \frac{2}{x^2}.$$

[illegible]

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

(log)

13/26

③ $\forall q \in]0, 1[:$

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{n+1}{n-(q_n)+1} \right) \leq E(X_{n,(q_n)}) \leq \frac{n}{2} \ln \left(\frac{n+1}{n-(q_n)+1} \right) + \frac{2}{2} \left(\frac{1}{n-(q_n)+1} - \frac{1}{n+1} \right)$$

on a $q_n \leq (q_n) \leq q_n$.

$$\text{il } n - q_n \leq n - (q_n) \leq n + 1 - q_n.$$

$$\text{il } 1 - \frac{q_n(1-q)}{n(1-q)} \leq \frac{n-(q_n)}{n(1-q)} \leq \frac{n+1-q_n}{n(1-q)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\text{donc } n - (q_n) \sim_{n \rightarrow \infty} n(1-q)$$

$$\text{on a } \frac{n+1}{n-(q_n)+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-q} + o\left(\frac{1}{1-q}\right)$$

$$\text{de plus, } \frac{2}{2} \left(\frac{1}{n-(q_n)+1} - \frac{1}{n+1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ pas somme.}$$

$$\text{donc avec } \frac{1}{2} \ln \left(\frac{n+1}{n-(q_n)+1} \right) \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{1}{1-q} \right) \right)$$

à retenir la 106 ou la 511.

$$\frac{E(X_{n,\alpha})}{\frac{1}{2} \ln(1-\alpha)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{par encadrement}$$

$$\text{donc } E(X_{n,\alpha}) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2} \ln(1-\alpha)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_{n,\alpha}) = -\frac{1}{2} \ln(1-\alpha)$$

On sait que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ diverge.

(C)

$$\frac{1}{(n+1)^2} \sim \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}; +\infty \mathbb{R}.$$

$$\text{Or, } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ diverge.}$$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+k+1)^2} \text{ diverge}$$

(12) a

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev
donne avec $\varepsilon > 0$:

$$P(|X_{n,(q_n)} - E(X_{n,(q_n)})| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} V(X_{n,(q_n)})$$

(12) a On a $(X_{n,(q_n)} + \frac{1}{\alpha} \ln(1-q))^2 \geq 0$ presque sûrement

L'inégalité de Markov donne avec $\varepsilon > 0$:

$$P\left((X_{n,(q_n)} + \frac{1}{\alpha} \ln(1-q))^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\left((X_{n,(q_n)} + \frac{1}{\alpha} \ln(1-q))^2\right)$$

donc $P(|X_{n,(q_n)} + \frac{1}{\alpha} \ln(1-q)| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\left((X_{n,(q_n)} + \frac{1}{\alpha} \ln(1-q))^2\right)$

b) La (10c) assure que: $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_{n,(q_n)}) = -\frac{1}{\alpha} \ln(1-q)$

donc $E(X_{n,(q_n)} + \frac{1}{\alpha} \ln(1-q)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

or,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(X_{n,(q_n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(X_{n,(q_n)} + \frac{1}{\alpha} \ln(1-q)) = 0$$

D'après Koëniç-Huyse: $V(X_{n,(q_n)} + \frac{1}{\alpha} \ln(1-q)) = E((X_{n,(q_n)} + \frac{1}{\alpha} \ln(1-q))^2) - (E(X_{n,(q_n)} + \frac{1}{\alpha} \ln(1-q)))^2$

Copie anonyme - n°anonymat : 520197

Emplacement QR Code	Code épreuve : 283	Nombre de pages :	Session : 2024
	Épreuve de :		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

En prenant à la limite on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(X_{n, \frac{1}{n}} + \frac{1}{2} \ln(1-q)) = \lim_{n \rightarrow \infty} E((X_{n, \frac{1}{n}} + \frac{1}{2} \ln(1-q))^2) - 0$$
$$= 0$$

donc par écartement et en reprenant la (12a) :

$$P(X_{n, \frac{1}{n}} + \frac{1}{2} \ln(1-q) \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$(X_{n, \frac{1}{n}})$ converge en probabilité vers une variable aléatoire certaine égale à $-\frac{1}{2} \ln(1-q)$

(13) la (5c). $f'(x) = -\frac{1}{2} \ln(1-q)$

(14) a

17/26

$$(14b) \quad \omega \in [|V_{m,t} - \bar{e}^{\lambda t}| \leq e^{-\lambda t} (1 - e^{-\varepsilon})]$$

$$\text{ie } |V_{m,t}(\omega) - \bar{e}^{\lambda t}| \leq e^{-\lambda t} - e^{-\varepsilon - \lambda t}$$

$$\text{ie } e^{-\varepsilon - \lambda t} - e^{-\lambda t} \leq V_{m,t}(\omega) - \bar{e}^{\lambda t}$$

$$\text{ie } -\varepsilon - \lambda t \leq \ln(V_{m,t}(\omega)) \text{ par variance de la suite}$$

$$\text{ie } \underline{-\ln(V_{m,t}(\omega)) - \lambda t \leq \varepsilon.}$$

je n'ai pas la valeur absolue.
supposée.

la (14a) nous apprend que $(V_{m,t})$ converge vers $\bar{e}^{\lambda t}$

$$\text{donc } P(|V_{m,t} - \bar{e}^{\lambda t}| \leq e^{-\lambda t} (1 - e^{-\varepsilon})) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1$$

car $e^{-\lambda t} (1 - e^{-\varepsilon}) > 0$.

donc par encadrement:

$$P(|-\ln(V_{m,t}) - \lambda t| \leq \varepsilon) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1.$$

donc $(- \ln(V_{n,i}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité
vers λt

$$\textcircled{a} \quad W_n = \frac{1}{t_2 - t_1} (\ln(V_{n,t_1}) - \ln(V_{n,t_2}))$$

on a par somme des convergence en probabilité.

$$W_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \frac{1}{t_2 - t_1} (-\lambda t_1 + \lambda t_2) = \lambda.$$

Donc W_n est un estimateur
convergent de λ .

(15) contrairement à la (8b), on ne passe pas par une
autre variable X_i ; on a directement $X_{(n),k}$
qui est la somme de $T_{n,i}$ de i allant de 1 à k .

⑥

Supposons que Z admette une espérance:

$$E(Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} k p q^k$$

$$= p q \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1}$$

$$= p q \times \frac{1}{(1-q)^2}$$

$$= \frac{q}{p} \quad \text{donc } Z \text{ admet une espérance qui vaut } \frac{q}{p}.$$

De même pour la variance..

$$E(Z^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 p q^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) p q^k + \sum_{k=0}^{+\infty} k p q^k$$

$$= p q^2 \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) q^{k-2} + q$$

$$= p q^2 \frac{2}{(1-q)^3} + q$$

$$= \frac{2q^2}{p^2} + q$$

$$= \frac{q(2q + p^2)}{p^2}$$

$$= \frac{q(1+q^2)}{p^2}$$

$$\text{donc } V(Z) = \frac{q(1+q^2)}{p^2} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q(1-q+q^2)}{p^2}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 520197

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 283

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Math 2

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\forall k \leq n, P(Z \geq k) = 1 - \sum_{k=0}^{k-1} P(Z=k)$$

$$= 1 - p \sum_{k=0}^{k-1} q^k$$

$$= 1 - (1 - q^k)$$

$$= q^k.$$

$$(17) @ P(U_n \geq \ell) = P\left(\bigcap_{i=1}^n (Z_i \geq \ell)\right)$$

$$= \prod_{i=1}^n P(Z_i \geq \ell) \quad \text{car indépendantes}$$

$$= \prod_{i=1}^n P(Z_1 \geq \ell) \quad \text{même loi}$$

$$= (q^{\ell})^n = q^{\ell n}$$

(18) donc $U_n \rightsquigarrow \mathcal{L}(@)$ avec $\alpha = \ell n$

$$\textcircled{18} P(Z_1 \geq a_1) \cap [Z_2 - Z_1 \geq a_2]$$

$$= P(Z_1 \geq a_1) (Z_2 - Z_1 \geq a_2) \times P(Z_1 \geq a_1)$$

$$= P(Z_2 \geq a_2 + a_1) \times P(Z_1 \geq a_1)$$

$$= q^{a_2 + a_1} \times q^{a_1}$$

$$= q^{a_2} \times q^{2a_1}$$

il manque $\frac{1}{1+q}$

$$\textcircled{19} P(Z_1 = k) = P(k \leq m X_1 < k+1) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$= \int_{\frac{k}{m}}^{\frac{k+1}{m}} \lambda e^{-\lambda r} dr$$

$$= \left[-\frac{\lambda e^{-\lambda r}}{\lambda} \right]_{\frac{k}{m}}^{\frac{k+1}{m}}$$

$$= e^{-\frac{k}{m}\lambda} - e^{-\frac{k+1}{m}\lambda}$$

$$= e^{-\frac{a}{m}n} (1 - e^{-\frac{a}{m}})$$

$$= (e^{-\frac{a}{m}})^n (1 - e^{-\frac{a}{m}})$$

donc $q = e^{-\frac{a}{m}}$ de même pour z_2 .

⑥ $w \in (z_1, z_{k_1+1})$

on a $z_1(w) \geq (m x_1) + 1$

ie $m x_1(w) \geq \lfloor m x_1(w) \rfloor \geq (m x_1) + 1 \geq m x_1$

ie $x_1(w) \geq x_1$

et $z_1(w) \geq k_1 + 1 \geq k_1$

donc $(z_1, z_{k_1+1}) \subset [x_1, x_1] \subset (z_1, z_{k_1})$

$w \in (z_2 - z_1, z_{k_2+2})$:

ie $\lfloor m x_2^w \rfloor - \lfloor m x_1^w \rfloor \geq (m y) + 2$

or, $m x_1^w - 1 < \lfloor m x_1^w \rfloor \leq m x_1^{(w)}$

donc $m x_2^w + 1 - m x_1^w \geq \lfloor m x_2^w \rfloor - \lfloor m x_1^w \rfloor \geq (m y) + 2 \geq m y + 1$

ie $m(x_2^w - x_1^w) \geq m y$ ie $(x_2^w - x_1^w) \geq y$

et $z_2(w) - z_1(w) \geq k_2 + 2\gamma_1 k_2$

on a le résultat.

③ on a d'après le ② :

$$P(\bar{X}_1 > u) \cap (\bar{X}_2 - \bar{X}_1 > \gamma) \leq P(\bar{Z}_1 \geq u_1) \cap (\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1 \geq k_2)$$

ie " $\left(\frac{1}{1+e^{-\frac{\gamma}{m}}} e^{-2\frac{\gamma}{m} \ln m \gamma} e^{-\frac{\gamma}{m} \ln \gamma} \right)$

de même :

$$P(\bar{Z}_1 \geq u_1 + 1) \cap (\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1 \geq k_2 + 2) \leq P(\bar{X}_1 > u \cap (\bar{X}_2 - \bar{X}_1 > \gamma))$$

ie $\frac{1}{1+e^{-\frac{\gamma}{m}}} e^{-2\frac{\gamma}{m} \ln m \gamma + 1} e^{-\frac{\gamma}{m} \ln \gamma + 2} \leq "$

$$\textcircled{d} \quad \frac{1}{1+e^{-\frac{\gamma}{m}}} e^{-2\frac{\gamma}{m} \ln m \gamma} e^{-\frac{\gamma}{m} \ln \gamma} < \frac{1}{1+e^{-\frac{\gamma}{m}}} e^{-2\frac{\gamma}{m} \ln m \gamma - 1} e^{-\frac{\gamma}{m} \ln \gamma - 1}$$

$$< \frac{1}{1+e^{-\frac{\gamma}{m}}}$$



Copie anonyme - n°anonymat : 520197

Emplacement QR Code	Code épreuve : 283	Nombre de pages : 27	Session : 2024
	Épreuve de : apres		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

2022 ~~à~~ ~~est~~ $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega)$ ne peut jamais être égal à $X_2(\omega)$

car si $X_1(\omega) \leq X_2(\omega)$

alors $X_{11}(\omega) = X_1(\omega) \neq X_2(\omega) = X_{21}(\omega)$.

si $X_1(\omega) > X_2(\omega)$

$X_1(\omega) \neq X_2(\omega)$

donc $P(X_1 = X_2) = 0$

① $\omega \in (\{X_{11} > x\} \cap \{X_{21} - X_{11} > y\})$

©

$$\begin{aligned}
 & P((T_1 = x) \cap (T_2 = y)) \\
 &= P((X_{(1)} = x) \cap (X_{(2)} - X_{(1)} = y)) \\
 &\neq P(X_{(1)} = x) \times P(X_{(2)} - X_{(1)} = y) \\
 &\text{On le montre grâce à la b.}
 \end{aligned}$$

Conclusion:pour $n=2$:

$$X_1 \sim \mathcal{E}(\lambda) \quad X_2 \sim \mathcal{E}(\lambda)$$

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{on a } T_1 \sim \mathcal{E}(2\lambda) \\
 &\text{et } T_2 \sim \mathcal{E}(\lambda)
 \end{aligned} \right\} \text{ indépendantes}$$

On a bien $X_{(2,1)} = T_{n,1}$ et $X_{(2,2)} = T_{n,1} + T_{n,2}$



