

Copie anonyme - n°anonymat : 367692

VI-00018
367692
Mat Appro



Code épreuve : 282

Nombre de pages : 22

Session : 2024

Épreuve de : MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 2 :

1) Soit une matrice de permutation et on a :

$$\begin{aligned} P^t P &= \left(\sum_{k=1}^n P_{ik} {}^t P_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n P_{ik} P_{jk} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ et il existe } \sigma, \text{ une bijection de } \\ &\quad \{1, n\} \text{ dans } \{1, n\} \text{ telle que :} \\ &\quad \forall (i, j) \in \{1, n\}^2, P_{i,j} = \delta_{i, \sigma(j)} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \delta_{i, \sigma(k)} \delta_{j, \sigma(k)} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \end{aligned}$$

un unique
donc il existe $\forall k \in \{1, n\}$ tel que $\sigma(k) = i$ car σ est
surjective et injective donc les termes s'annulent si
 $k \neq k'$ (car $\delta_{i,k} \neq \delta_{i,k'}$ si $k \neq k'$) on a donc :

$$\begin{aligned} &= \left(\delta_{i,i} \delta_{j,i} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \\ &= \left(\delta_{j,i} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{ce qui est } I_n \\ &= I_n \end{aligned}$$

$$P^T P = I_n \quad \text{donc } P \text{ est orthogonale}$$

$$\bullet \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, {}^t p_{ij} = p_{ji} = \delta_{ij} \sigma(i)$$

(avec σ définie comme plus tôt)

~~on considère σ^{-1} (existe car σ bijective)~~

$$\text{on a } \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \delta_{j, \sigma(i)} = \delta_{\sigma^{-1}(j), i}$$

2) Supposons Q soit une matrice de Hadamard

- alors les vecteurs colonnes de Q sont deux à deux orthogonaux: on les note $(c_i)_{1 \leq i \leq n}$

on a donc: $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \langle c_i, c_j \rangle = 0$ si $i \neq j$
 de plus: $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \|c_i\|^2 = \sum_{j=1}^n 1 = n$
 car tous les coefficients de Q appartiennent à $\{-1, 1\}$
 donc $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} c_i\right)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille orthogonale de vecteurs normés.

→ Donc c'est une famille ortho-normée (de vecteurs non nuls évidemment) donc cette famille est libre.

→ De plus $\# \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{n}} c_i\right)_{1 \leq i \leq n} \right\} = n = \dim(M_{n,1}(\mathbb{R}))$
 et sachant que la famille est libre, de vecteurs de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ on a: $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} c_i\right)_{1 \leq i \leq n}$ est une base ortho-normée de $M_{n,1}(\mathbb{R})$

→ Soit $\cos, \frac{1}{\sqrt{n}} Q$ est la matrice de passage de la base ortho-normée canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dans la base ortho-normée $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} c_i\right)_{1 \leq i \leq n}$

donc par le cours: $\frac{1}{\sqrt{n}} Q$ est orthogonale.

$$\text{donc } \left(\frac{1}{\sqrt{n}} Q \right) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} Q \right)^T = I_n$$

$$\text{donc } \underline{n I_n = {}^t Q Q}$$

- Q est une matrice de Hadamard donc:
 $\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, Q_{ij} \in \{-1, 1\}$

$$\text{donc: } \underline{\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, Q_{ij}^2 = 1}$$

donc Q est une matrice de Hadamard $\Rightarrow {}^t Q Q = n I_n$
 $\left\{ \begin{array}{l} \forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, Q_{ij}^2 = 1 \end{array} \right.$

Supposons maintenant que ${}^t Q Q = n I_n$
et que pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, Q_{ij}^2 = 1$

$\rightarrow Q$ est évidemment carrée

$$\rightarrow \forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \sqrt{Q_{ij}^2} = \sqrt{1} = \pm 1$$

$$\text{donc } \underline{\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, Q_{ij} \in \{-1, 1\}}$$

$$\rightarrow {}^t Q Q = n I_n \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{n}} Q \right) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} Q \right)^T = I_n$$

donc $\frac{1}{\sqrt{n}} Q$ est orthogonale.

Donc ses vecteurs colonnes notés $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} e_i \right)_{1 \leq i \leq n}$ sont orthogonaux.

$$\text{donc: } \forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \left\langle \frac{1}{\sqrt{n}} e_i, \frac{1}{\sqrt{n}} e_j \right\rangle = 0 \text{ si } i \neq j$$

$$\text{donc: } \forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0$$

donc sachant que les vecteurs colonnes de Q
sont $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$, ils sont orthogonaux deux à deux

Pour ces 3 propriétés: Q est une matrice de Hadamard.

Pour on a bien montré l'équivalence:

Q est une matrice de Hadamard

$$\Leftrightarrow {}^t Q Q = n I_n \text{ et: } \forall (i,j) \in \{1,n\}^2, Q_{i,j}^2 = 1$$

3). $\forall (i,j) \in \{1,n\}^2, H_{i,j} \in \{-1,1\}$ donc $H_{j,i} \in \{-1,1\}$

donc: $\forall (i,j) \in \{1,n\}^2, {}^t H_{i,j} \in \{-1,1\}$

• ${}^t H$ est carrière

$$\bullet {}^t ({}^t H) H = \left(\sum_{k=1}^n H_{i,k} {}^t H_{k,j} \right)_{\substack{i \in \{1,n\} \\ j \in \{1,n\}}}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n H_{i,k} H_{j,k} \right)_{\substack{i \in \{1,n\} \\ j \in \{1,n\}}}$$

$$= {}^t H H$$

$$= \underline{n I_n}$$

↙ car H est une matrice de Hadamard

de plus: $\forall (i,j) \in \{1,n\}^2, {}^t H_{i,j}^2 = H_{j,i}^2 = 1$

donc on a bien d'après 2):

${}^t H$ est une matrice de Hadamard

Copie anonyme - n°anonymat : 367692

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 182

Nombre de pages : 22

Session : EC6

Épreuve de : MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$4) \quad {}^t(DH)(DH) = {}^tH D^2 H \quad \text{or } D = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ avec :}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\text{donc } D^2 = \text{diag}(\lambda_i^2)_{1 \leq i \leq n} \text{ i.e.}$$

$$= {}^tH I_n H$$

$$= {}^tH H$$

$$= n I_n \quad \text{car } H \text{ est une matrice de Hadamard}$$

$$\text{donc avec en plus } DH = \left(\sum_{k=1}^n D_{i,k} H_{k,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$= \left(D_{i,i} H_{i,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$\text{donc } (DH)_{i,j} = D_{i,i} H_{i,j} \quad (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$$

$$\text{donc : } \forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \left((DH)_{i,j} \right)^2 = (D_{i,i} H_{i,j})^2$$

$$= \underbrace{D_{i,i}^2}_{=1} H_{i,j}^2$$

$$= H_{i,j}^2$$

or avec H une matrice
de Hadamard

$$= 1$$

donc : DH est une matrice de Hadamard (g 2)

$$\bullet \quad {}^t(HD)(HD) = {}^t D \underbrace{{}^t H H}_{= n I_n} D$$

$$= n {}^t D D$$

$\hookrightarrow {}^t D = D$ car D diagonale

$$= n D D$$

$$= n D^2$$

$$= n I_n$$

$\hookrightarrow$ car $D^2 = I$ car $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$
avec $\lambda_i \in \{-1, 1\}$ ($i \in \{1, n\}$)

de plus: $\forall (i, j) \in \{1, n\}^2$, $(HD)_{ij} = \left(\sum_{k=1}^n H_{ik} D_{kj} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$

car $D_{i,j} = 0$ si $i \neq j$
(car D diagonale)

$\hookrightarrow = (H_{ij} D_{jj})_{1 \leq i, j \leq n}$

donc comme précédemment:

$$\forall (i, j) \in \{1, n\}^2, ((HD)_{ij})^2 = \underline{1}$$

donc ces deux propriétés montrent: HD est
une matrice de Hadamard (cf 2)

$$\bullet \quad {}^t(PH)PH = {}^t H \underbrace{P P}_{= I_n} H$$

car P orthogonale (cf 1)

$$= {}^t H H$$

$$= n I_n \quad (\text{car } H \text{ est une matrice de Hadamard})$$

$$\text{et } (PM)_{ij} = \left(\sum_{k=1}^n P_{ik} H_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \\ \forall (i,j) \in \{1, \dots, n\},$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n \delta_{ik} H_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

ie: $\rightarrow$
 par la définition du
 symbole de
 Kronecker:

$$= (H_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$\text{donc : } \forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}, ((PM)_{ij})^2 = \underline{1}$$

(en raisonnant comme avant)

donc les deux propriétés $(\rightarrow (PM)^T(PM) = n I_n)$
 $\rightarrow \forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}, (PM)_{ij}^2 = 1$

indiquent: PM est une matrice de Hadamard

$$\begin{aligned} \bullet \quad (MP)(MP) &= {}^t P {}^t M M P && \text{en raisonnant comme} \\ &= {}^t P (I_n) P && \text{précédemment;} \\ &= n {}^t P P \\ &= n \times I_n \end{aligned}$$

et de la même manière qu'au dessus on trouve:

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}, (MP)_{ij}^2 = 1$$

donc ces deux propriétés indiquent (g2): MP est une matrice de Hadamard.

On a donc bien:

PM, DM, MP et MD sont toutes des matrices de Hadamard

5) H est une matrice de Hadamard donc les coefficients de sa première ligne sont dans $\{-1, 1\}$
on pose $D \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$
une matrice diagonale telle que:

$$\forall (i, j) \in \{1, n\}^2, D_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ H_{ij} & \text{si } i = j \end{cases}$$

on a donc:

$$\begin{aligned} HD &= \left(\sum_{k=1}^n H_{ki} D_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \\ &= (H_{ij} D_{jj})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \end{aligned}$$

donc la première ligne de HD est:

$$(H_{1j} D_{jj})_{1 \leq j \leq n} = (H_{1j} H_{1j})_{1 \leq j \leq n}$$

et comme H est une matrice de Hadamard on a
(cf 2):

$$\begin{aligned} &= (H_{1j}^2)_{1 \leq j \leq n} \\ &= (1)_{1 \leq j \leq n} \end{aligned}$$

donc on a bien D une matrice diagonale ne comportant que les valeurs -1 et 1 sur sa diagonale, donc HD est une matrice de Hadamard
(cf 4)

Ainsi: il existe HD , une matrice de Hadamard de taille $n \times n$ dont la première ligne est $(1)_{1 \leq j \leq n}$

Copie anonyme - n°anonymat : 367692

Emplacement QR Code	Code épreuve : 282	Nombre de pages :	Session : 2024
	Épreuve de : MATHÉMATIQUES APPROFONDIES		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

$$\begin{aligned}
 7) \quad S^T S &= \left(\sum_{k=1}^n S_{i,k} S_{k,m} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq m \leq n}} \\
 &= \left(\sum_{k=1}^n S_{i,k} S_{m,k} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq m \leq n}} \\
 &= n I_n \quad \text{car } S^T S = n I_n \text{ donc}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{donc } S^T S &= \left(\sum_{k=1}^n (S_{i,k} + 1 - 1) (S_{m,k} + 1 - 1) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq m \leq n}} \\
 &= \left(\sum_{k=1}^n (S_{i,k} + 1) (S_{m,k} + 1 - 1) - \sum_{k=1}^n (S_{m,k} + 1 - 1) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq m \leq n}} \\
 &=
 \end{aligned}$$

11) Soit A, B deux matrices de Hadamard.

$$\text{alors } \forall (i, j) \in \{1, n\} \times \{1, n\} \quad (A \otimes B)_{i,j}^2 = (A_{k,p} B_{s,r})^2$$

avec (k, p, s, r) quel 4-uplet dépendant de $(i, j) \in \{1, n\}^2$

$$\begin{aligned}
 \text{donc sachant que} & \quad = A_{k,p}^2 B_{s,r}^2 \\
 A \text{ et } B \text{ sont des matrices de} & \\
 \text{Hadamard :} & \quad = 1 \times 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{donc les coefficients de } A \otimes B & \quad = 1 \\
 \text{valent } 1 &
 \end{aligned}$$

il reste à montrer que ${}^t(A \otimes B)(A \otimes B) = nI_n$

13)

```
import numpy as np
def test_hadamard(M):
    n, p = np.shape(M)
    if n != p:
        return -2
    else:
        for i in range(0, n):
            for j in range(0, n):
                if (M[i, j] != -1) or (M[i, j] != 1):
                    return -1
            for j in range(0, n-1):
                for k in range(j+1, n):
                    if np.dot(np.transpose(M), M)[j, k] != 0:
                        return 0
        return 1
```

on a en effet que tMM a pour diagonale n par la construction de M (de Hadamard) ^{ou par (8.2)} il suffit donc que les coefficients non diagonaux soient nuls pour que M soit de Hadamard.

14) a)

```
import numpy.random as rd
def rand_hadamard(m, Nmax):
```

```
    n = 4 * m
```

```
    for k in range(0, Nmax):
```

```
        matpm = np.ones((n, n), dtype=int)
```

```
        for i in range(1, n):
```

```
            nb-un = 0
```

```
            j = 0
```

```
            while 2 * nb-un < n and j < n:
```

```
                val = rd.randint(0, 2)
```

```
                nb-un = nb-un + val
```

```
                matpm[i, j] = 2 * val - 1
```

```
                j = j + 1
```

```
            if (2 * nb-un == n):
```

```
                for k in range(j, n):
```

```
                    matpm[i, k] = 1
```

```
            if (test_hadamard(matpm) == 1):
```

```
                return matpm
```

```
    return np.zeros((n, n), dtype=int)
```

je suppose ici qu'il y a une erreur dans le programme
ce serait $nb-un =$ et non $nb-un +$

(que je ne connais pas).

Partie II:

15)

→ On note g l'application $g: \begin{cases} M^n \times M^n \rightsquigarrow M \\ (x, y) \mapsto 2x/y \end{cases}$

en effet $g(M^n \times M^n) \subset M: \forall (u, v) \in M^{2n}, (u, v)$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{6n} \frac{u_k}{6n} \frac{v_k}{6n} \in M$$

car $(M, +, \cdot)$ est stable par la somme et le produit par un réel.

$$\begin{aligned} \rightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad g(u, v) &= \sum_{k=1}^n p_k u_k v_k \quad (\text{avec } u = (u_k)_{1 \leq k \leq n} \\ &\quad v = (v_k)_{1 \leq k \leq n}) \\ &= \sum_{k=1}^n p_k v_k u_k \\ &= g(v, u) \end{aligned}$$

donc g est symétrique

$$\rightarrow \text{Soient } u = (u_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n, \quad v = (v_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n, \quad w = (w_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} g(\lambda u + v, w) &= \sum_{k=1}^n p_k (\lambda u_k + v_k) w_k \\ \text{par linéarité de la somme} \quad \rightarrow &= \lambda \sum_{k=1}^n p_k u_k w_k + \sum_{k=1}^n p_k v_k w_k \\ &= \lambda g(u, w) + g(v, w) \end{aligned}$$

donc g est linéaire à gauche.

Étant symétrique, alors: g est bilinéaire

$$\rightarrow \text{Soit } u = (u_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\begin{aligned} g(u, u) &= \sum_{k=1}^n p_k u_k u_k \\ &= \sum_{k=1}^n \underbrace{p_k}_{\geq 0} u_k^2 \end{aligned}$$

comme probabilités

donc par somme de réels positifs:

$\forall u \in \mathbb{R}^n, \quad g(u, u) \geq 0$ donc g est positive

Copie anonyme - n°anonymat : 367692

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 22

Session : ECC

Épreuve de : MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

→ Soit $u = (u_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n$, supposons que $g(u, u) = 0_n$

$$\text{alors } \sum_{k=1}^n p_k u_k^2 = 0$$

donc par somme d'entiers tous positifs :

$$\forall k \in \{1, n\}, p_k u_k^2 = 0$$

$$\text{donc : } \forall k \in \{1, n\}, P(\{w_k\}) u_k^2 = 0 \quad \textcircled{1}$$

or $\Omega = \{ (w_i)_{1 \leq i \leq n} \}$ donc Ω est fini, et

$$\text{donc : } \forall k \in \{1, n\}, P(\{w_k\}) \neq 0$$

car les événements peuvent être réalisés car :
élémentaires.

$$\forall A \subset \Omega, P(A) \neq 0 \text{ (énoncé)}$$

il suffit de prendre $A = \{w_i\} \subset \Omega (i \in \{1, n\})$

$$\text{donc : } \forall i \in \{1, n\}, P(\{w_i\}) \neq 0$$

$$\text{donc : } \textcircled{1} \Rightarrow \forall k \in \{1, n\}, u_k^2 = 0$$

$$\Rightarrow \forall k \in \{1, n\}, u_k = 0$$

$$\Rightarrow u = 0_{\mathbb{R}^n}$$

$$\text{donc : } g(u, u) = 0_n \Rightarrow u = 0_{\mathbb{R}^n}$$

donc g est définie.

Pour g est une forme bilinéaire, symétrique définie
et positive, g est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$

Pour : l'application $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \langle x, y \rangle$ est
un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$

16) Raisonnons par Analyse-synthèse: Soit $i \in \{1, 2\}$

• Analyse: et $Z_i(x)$ est fini car x est fini

Z_i est distribuée donc admet un moment d'ordre 2 et:

Supposons qu'il existe $(a_i, b_i) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ tel que:

$$\mathbb{E}(a_i Z_i + b_i) = 0 \quad \text{et} \quad \forall (a_i Z_i + b_i) = 1$$

alors par linéarité de l'espérance: $0 = a_i \mathbb{E}(Z_i) + b_i$
et on a aussi: $\forall (a_i Z_i + b_i) = 1$
 $= a_i^2 \mathbb{V}(Z_i)$

$$\text{donc: } (S) \begin{cases} a_i^2 \mathbb{V}(Z_i) = 1 \\ a_i \mathbb{E}(Z_i) + b_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{V}(Z_i) = \frac{1}{a_i^2} & (a_i > 0) \\ \mathbb{E}(Z_i) = \frac{-b_i}{a_i} & (a_i > 0) \end{cases}$$

or. si $\mathbb{V}(Z_i) = 0$, alors $0 = \frac{1}{a_i^2}$ ce qui est impossible
donc $\mathbb{V}(Z_i) \neq 0$

$$\text{donc: } (S) \begin{cases} a_i^2 = \frac{1}{\mathbb{V}(Z_i)} \\ \mathbb{E}(Z_i) = \frac{-b_i}{a_i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a_i| = \sqrt{\frac{1}{\mathbb{V}(Z_i)}} = a_i & (\text{car } a_i \in \mathbb{R}^+) \\ \mathbb{E}(Z_i) = -b_i \sqrt{\mathbb{V}(Z_i)} \end{cases}$$

donc :

$$\textcircled{1} \Rightarrow \begin{cases} a_i = \sqrt{\frac{1}{V(Z_i)}} \\ b_i = \frac{-E(Z_i)}{\sqrt{V(Z_i)}} \end{cases} \quad (V(Z_i) \neq 0)$$

donc il est clair que a_i et b_i sont uniques
(une variable aléatoire donnée n'a qu'une seule espérance et variance)

• Synthèse :

• supposons que $V(Z_i) \neq 0$

on pose $a_i = \sqrt{\frac{1}{V(Z_i)}}$; $b_i = \frac{-E(Z_i)}{\sqrt{V(Z_i)}}$

$a_i Z_i + b_i$ admet une espérance (linéarité de l'espérance et) : $E(a_i Z_i + b_i) = \frac{1}{\sqrt{V(Z_i)}} E(Z_i) - \frac{E(Z_i)}{\sqrt{V(Z_i)}} = 0$

et de même on a : $V(a_i Z_i + b_i) = a_i^2 V(Z_i)$

↑
comme Z_i admet une variance

$$= 1$$

donc de plus on a bien $a_i > 0$ et $b_i \in \mathbb{R}$

donc : $\exists (a_i, b_i) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{R} \mid \begin{cases} E(a_i Z_i + b_i) = 0 \\ V(a_i Z_i + b_i) = 1 \end{cases}$

• supposons que $V(Z_i) = 0$, il n'existe alors pas de couples (a_i, b_i) vérifiant les propriétés souhaitées

On a donc : en supposant que $V(Z_i) \neq 0$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) :
il existe un unique couple $(a_i, b_i) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{R}$ vérifiant
 $E(a_i Z_i + b_i) = 0$ et $V(a_i Z_i + b_i) = 1$

17)

$$\begin{aligned}
 \langle v; \mu_0 \rangle &= \sum_{k=1}^n p_k V(w_k) \times 1 \\
 &= \sum_{k=1}^n p(\{w_k\}) \times V(w_k) \\
 \text{or } E(V_{\{w_k\}}) &= V(w_k)
 \end{aligned}$$

18)

$$\begin{aligned}
 \forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}, i \neq j \Rightarrow \langle x_i, \mu_0 \rangle &= E(x_i) \\
 (\text{selon 17}) &= E(a_i z_i + b_i) \\
 &= 0 \quad (\text{glb})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}, i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle &= E(x_i x_j) \\
 &= E(x_i)^2 \\
 &= V(x_i) + E(x_i)^2 \\
 &= V(a_i z_i + b_i) + E(a_i z_i + b_i)^2 \\
 &= \underline{1} + 0
 \end{aligned}$$

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}, i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle = E(x_i x_j)$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{cov}(x_i, x_j) + \underbrace{E(x_i)}_{=0} \underbrace{E(x_j)}_{=0} \\
 &= \text{cov}(x_i, x_j)
 \end{aligned}$$

com $V(A+B) = V(A) + V(B) + 2\text{cov}(A, B)$
avec A, B deux var ayant un
moment d'ordre 2.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{V(x_i + x_j) - V(A) - V(B)}{2} \\
 &= \frac{V(x_i + x_j) - 2}{2}
 \end{aligned}$$

Code épreuve : 28L

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\text{or } X_i = a_i Z_i + b_i \quad (i \in \{1, \dots, p\})$$

et $(Z_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$ sont indépendants, donc par le lemme des coalitions :

pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, p\} \setminus \{i, i\}$, X_i et X_j sont indépendants.

Donc :

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, i \neq j \Rightarrow \langle X_i, X_j \rangle &= \frac{\varphi(X_i) + \varphi(X_j) - 2}{2} \\ &= \frac{1 + 1 - 2}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, i \neq j \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \langle X_i, \mu_0 \rangle = 0 \\ \langle X_j, X_i \rangle = 1 \\ \langle X_i, X_j \rangle = 0 \end{array} \right.$$

20) a) Z admet une espérance donc :

$$E(Z) = \sum_{k \in Z(S)} k P(Z=k) = 0 = \sum_{k=1}^m P(Z=a_k) k$$

205)

• $(\mathbb{R}^{m-1}[X], +, \cdot)$ est bien un espace vectoriel

• T est une application de $\mathbb{R}^{m-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^m$

• $\forall (P, Q, \lambda) \in (\mathbb{R}^{m-1}[X])^2 \times \mathbb{R}, T(\lambda P + Q)$

$$= ((\lambda P + Q)(d_i))_{1 \leq i \leq m}$$

$$= \lambda (P(d_i))_{1 \leq i \leq m} + (Q(d_i))_{1 \leq i \leq m}$$

$$= \lambda T(P) + T(Q)$$

Donc : $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m-1}[X], \mathbb{R}^m)$

• Soit $Q \in \text{Ker}(T)$, $T(Q) = (Q(d_i))_{1 \leq i \leq m} = 0_{\mathbb{R}^m}$

donc je suppose que $(d_i)_{1 \leq i \leq m}$ sont tous distincts

alors Q admet n racines distinctes or $\deg Q \leq m-1$
 car $Q \in \mathbb{R}^{m-1}[X]$

donc : $Q = 0_{\mathbb{R}[X]}$

donc $\text{Ker}(T) \subset \{0\}$

et $\text{Ker}(T)$ est un espace vectoriel donc $0 \in \text{Ker}(T)$
 $(\mathbb{R}^{m-1}[X])$

donc : $\text{Ker}(T) = \{0\}$

donc T est injective.

• De plus $\mathbb{R}^{m-1}[X]$ et $\mathbb{R}^m$ sont de même dimension : m

donc T injective $\Leftrightarrow T$ bijective.

Donc T est un isomorphisme de $M_{m-1}(X)$ dans M^m

20 c) Donc pour $(y_i)_{1 \leq i \leq m} = (x_i)_{1 \leq i \leq m}$,

par 20 b) on a: $\exists! Q \in M_{m-1}(X), T(Q) = (d_i)_{1 \leq i \leq m} = (Q)$

Partie III :

23) $\rightarrow \varphi$ est une application.

$\rightarrow$ Soient $\lambda \in M, x = (x_{(i,j)})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in M^{n^2}, y = (y_{(i,j)})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in M^{n^2}$,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x + y) &= [\lambda x_{(i-1)n+j} + y_{(i-1)n+j}]_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2} \\ &\xrightarrow{\text{non stabilité de } M_n(M) \text{ pour la somme et le produit :}} [\lambda x_{(i-1)n+j}]_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2} + [y_{(i-1)n+j}]_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2} \\ &= \varphi(\lambda x) + \varphi(y) \end{aligned}$$

$\rightarrow M^{n^2}$ et $M_n(M)$ sont des espaces vectoriels

Donc : $\boxed{\varphi \in L(\mathbb{R}^{n^2}, M_n(\mathbb{R}))}$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{n^2}, x = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \Rightarrow \|\varphi(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{(i-1)n+j}^2}$$

24) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} {}^tAA &= \left(\sum_{k=1}^n {}^tA_{ik} A_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n A_{ki} A_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } r({}^tAA) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ki} A_{ki} \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ij}^2 \end{aligned}$$

donc on a bien : $r({}^tAA) = \|A\|^2$

Donc : $\boxed{\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \|A\|^2 = r({}^tAA)}$

25)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Soit $J = (j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(\mathbb{N})$

$$|\langle A, J \rangle| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |A_{ij}| = F(A)$$

$$\begin{aligned} \text{or } \|A\| &= \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ij}^2} & \|J\| &= \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} 1} \\ & & &= \sqrt{n^2} \\ & & &= n \end{aligned}$$

Par le théorème de Cauchy-Schwarz :

$$\boxed{|F(A)| \leq n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}^2 \right)^{1/2}}$$

$= F(A)$ car tous les termes des sommes sont positifs.

De même, en considérant $(i, 1, \dots, 1)$, la i -ième colonne de A on a :

il

il reste à montrer d'autres inégalités

Copie anonyme - n°anonymat : 367692

Emplacement QR Code	Code épreuve : 282	Nombre de pages : 22	Session : 2024
	Épreuve de : MATHÉMATIQUES APPROFONDIES		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Par le théorème de Cauchy Schwarz, on a : avec $J = (-1)_{1 \leq i, j \leq n}$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$

$$|\langle \varphi(x), J \rangle| \leq \|\varphi(x)\| \|J\|$$

$$\leq \|x\| \sqrt{n^2}$$

donc avec $\langle \varphi(x), J \rangle = F(\varphi(x))$

inégalité triangulaire

on a :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{n^2})^2, |F(\varphi(x)) - F(\varphi(y))| \leq |F(\varphi(x))| + |F(\varphi(y))|$$

$$\leq \|x\| n + \|y\| n$$

or $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle$ ie :

$$\langle x, y \rangle \geq \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2}{2}$$

$$\leq n (\|x\| + \|y\|)$$

$$\leq n (\|x - y\|^2 + 2\langle x, y \rangle)$$

je n'ai pas abouti

29) Soit $Q \in O_n$ Q est orthogonale donc ses colonnes $(C_i)_{1 \leq i \leq n}$ forment une base orthonormée.

Donc : $\forall i \in (1, n), \langle C_i, C_i \rangle = 1 = \sum_{k=1}^n Q_{k,i}^2$

donc $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n Q_{k,i}^2 = n$

donc $F(Q) \leq n \sqrt{n}$ (1)

$$35a) |\langle x, y \rangle| = \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \neq 0$$

donc il n'y a pas $\frac{n}{2}$ x_i et y_i ($i \in \{1, n\}$) de signes opposés (sinon $\langle x, y \rangle = 0$)

donc il existe $j \in \{1, n\}$, $x_j = 1$ et $y_j = 1$ ou $x_j = -1$ et $y_j = -1$

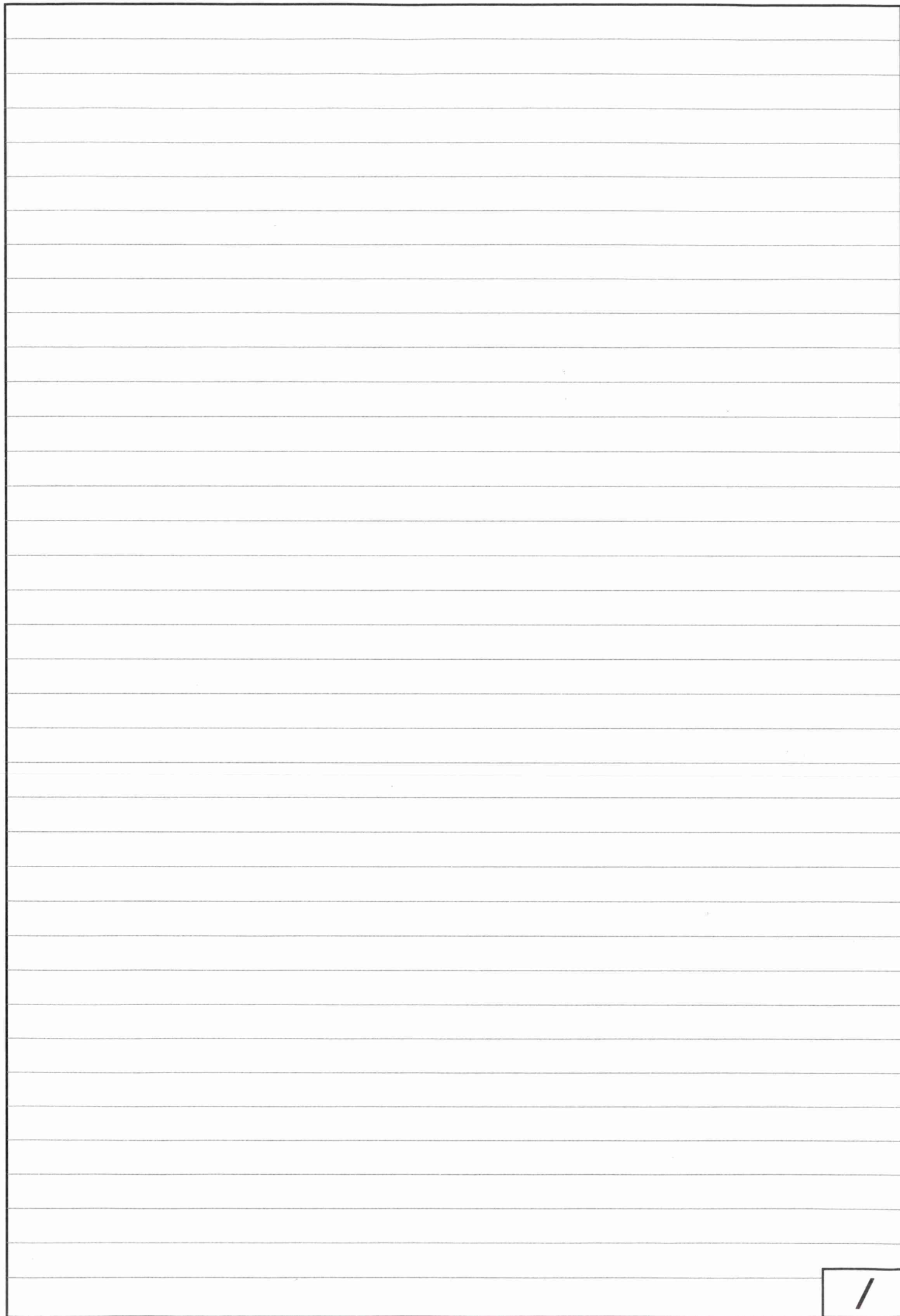
par abstr.

35d) on utilise (a 31), (a 35c) :

$$\forall Q \in \mathcal{H} \quad \|Q\| = \sqrt{n} - \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{2} \left\| Q - \frac{1}{\sqrt{n}} \int(Q) \right\|}_{\geq \frac{\sqrt{n}}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{n}{\sqrt{n} n^2} = \frac{1}{\sqrt{n} n}$$

je n'ai plus le temps d'écrire...



Blank lined paper with horizontal ruling lines.