

Copie anonyme - n°anonymat : 125114

AO-00001
125114
Mat Appro



Code épreuve : 297

Nombre de pages : 24

Session : 2024

Épreuve de : Maths Approfondies ED HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

exercice 1:
soit $n \geq 2$.

a- Notons $c_1, \dots, c_n$ les colonnes de J_n .

On a $c_1 = \dots = c_n \neq 0$

$$\text{Ainsi } \boxed{\text{rg}(J_n) = 1}$$

- $\text{rg}(J_n) < n$ donc comme $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors J_n n'est pas bijective

Ainsi, $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } J_n}$

$$\bullet \dim(E_0(J_n)) = \dim \ker(J_n - 0) = \dim \ker(J_n)$$

On d'après le théorème du rang,

$$\dim(\ker(J_n)) = n - \text{rg}(J_n) = n - 1$$

$$\text{donc : } \boxed{\dim(E_0(J_n)) = n - 1}$$

b- soit $V_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$J_n V_n = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = n \times \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n V_n$$

On, V_n est différent du vecteur nul donc $\boxed{V_n \text{ est un vecteur propre associé à la valeur propre } n}$

1c - d'une part, on a $\dim(E_n(\mathcal{I}_n)) \geq 1$ par définition

donc $\dim E_0(\mathcal{I}_n) + \dim(E_n(\mathcal{I}_n)) \geq n$

$$\text{On, } \sum_{\lambda \in \text{Sp}(\mathcal{I}_n)} \dim E_\lambda(\mathcal{I}_n) \leq n$$

Ainsi, il ne peut y avoir d'autres valeurs propres de $\mathcal{I}_n$ que 0 et n :

$$\boxed{\text{Sp}(\mathcal{I}_n) = \{0, n\}}$$

2- f_n est polynômiale donc $\boxed{f_n \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}^n}$

$$\begin{aligned} 3a- \text{ soit } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad d_i f_n(x) &= \frac{2}{n} x_i - \frac{2}{n} \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \\ &= \frac{2}{n} \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, d_i f_n(x) = \frac{2}{n} \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)}$$

3b- f est C^1 donc $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ est un point critique si il annule le gradient de f .

$$\begin{aligned} \text{On a les équivalences: } \nabla f(a) = 0_{\mathbb{R}^n} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{n}(\alpha_1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k) = 0 \\ \vdots \\ \frac{2}{n}(\alpha_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n \\ \alpha_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k \end{cases} \end{aligned}$$

On a les équivalences: $\nabla f(a) = 0_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dots = \alpha_n \\ \alpha_1 = \frac{1}{n} \times n \alpha_1 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n$

Ainsi, les points critiques de f_n sont les points de la forme $(a, \dots, a) \in \mathbb{R}^n$

4a- soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$

• Si $i=j$: $\partial_{i,i}^2 f_n(x) = \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} = \frac{2n-2}{n^2}$

• Si $i \neq j$: $\partial_{i,j}^2 f_n(x) = -\frac{2}{n^2}$

4b- Ainsi, $\nabla^2 f_n(a, \dots, a) = \begin{pmatrix} \frac{2n-2}{n^2} & & (-\frac{2}{n^2}) \\ & \ddots & \\ (-\frac{2}{n^2}) & & \frac{2n-2}{n^2} \end{pmatrix}$

$$= \frac{2}{n^2} \begin{pmatrix} n-1 & & (-1) \\ & \ddots & \\ (-1) & & n-1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{n^2} \left[n \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} - 1 \times \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \boxed{\frac{2}{n^2} (n I_n - J_n)}$$

4c-

```
import numpy as np
n = int(input('entrez la valeur de n: '))
I = np.eye(n)
J = np.ones([n,n])
Hessienne = (2/n**2) * (n*I - J)
print(Hessienne)
```

4d- $\boxed{\text{Sp}(\nabla^2 f_n(a, \dots, a)) = \{0, n-1\}}$

5a- Rappelons qu'avec Cauchy-Schwarz: $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$
 en choisissant $u = (1, \dots, 1)$ et $v = (x_1, \dots, x_n)$, il vient:

$$\langle (1, \dots, 1), (x_1, \dots, x_n) \rangle^2 \leq \|(1, \dots, 1)\|^2 \|(x_1, \dots, x_n)\|^2$$

soit: $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n 1^2\right) \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right) = n \sum_{k=1}^n x_k^2$

Ainsi, $\boxed{\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2}$

5b- Ainsi, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2$

donc $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \geq 0$

$\hat{f}_n$: $\boxed{f_n \text{ admet un minimum global en } 0}$

6a- $\boxed{\text{def } f_2(x, y):}$
 $\quad z = (1/2)(x**2 + y**2) - (1/2)(x+y)**2$
 $\quad \text{return } z$

Copie anonyme - n°anonymat : 125114

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 24

Session : 2024

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Maths Appro EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

exercice 2 :

1a- $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

1b- soit $x > 0$.

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composition $x \mapsto \arctan \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \right)' = \frac{-1}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}$$

Ainsi en notant $f : x \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Donc f est une fonction constante : $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = c$

On, en évaluant en $x = 1$:

$$f(1) = 2\arctan(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Ainsi, } c = 2 \text{ et } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 1c. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \arctan(0)}{x - 0} \quad \text{car } \arctan(0) = 0 \\
 &= \arctan'(0) \\
 &= \frac{1}{1+0} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\boxed{\arctan x \underset{0}{\sim} x}$

$$\begin{aligned}
 2a. \quad &\bullet \mathbb{R} \text{ est centré en } 0 \\
 &\bullet \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{2}{\pi(e^{-x} + e^x)} = f(x)
 \end{aligned}$$

donc f est paire

De surcroît, f est continue, sur $\mathbb{R}$ et définie donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ est impropre en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{x^2}} = \frac{2x^2}{\pi(e^x + e^{-x})} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \times \frac{x^2}{e^x}$$

donc par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^2}} = 0$

Ainsi, $f(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

On $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge (intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$)
 $\left| x \mapsto \frac{1}{x^2} \right.$ est positive

donc par critère de négligeabilité pour les intégrales d'intégrandes positifs, $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge et par continuité de f sur $\mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge.

enfin, par positivité de f , $\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \text{ converge} \right]$

2b- • f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et quotient de telles fonctions

• f est positive sur $\mathbb{R}$ par positivité de $\exp$ sur $\mathbb{R}$.

• $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut $2 \int_0^{+\infty} f(x) dx$

• soit $A > 0$. $\int_0^A f(x) dx = \int_0^A \frac{2}{\pi(e^x + e^{-x})} dx$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^A \frac{-e^x}{e^{2x} + 1} dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^A \frac{e^x}{1 + (e^x)^2} dx$$

$$= \frac{2}{\pi} [\arctan(e^x)]_0^A$$

$$= \frac{2}{\pi} \arctan(e^A) - \frac{2}{\pi} \arctan(1)$$

$$= \frac{2}{\pi} \arctan(e^A) - \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{4}$$

$$\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Alors } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) dx = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

Ainsi f peut être considérée comme une densité

3- Notons F la fonction de répartition de la variable aléatoire x de densité f .

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$\text{Soit } B < x. \quad \int_B^x f(t) dt = \frac{2}{\pi} [\arctan(e^t)]_B^x \\ = \frac{2}{\pi} \arctan(e^x) - \frac{2}{\pi} \arctan(e^B)$$

$$\text{Or } \lim_{B \rightarrow -\infty} e^B = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \arctan(x) = 0$$

$$\text{donc } \int_{-\infty}^x f(t) dt = \frac{2}{\pi} \arctan(e^x)$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(e^x)}$$

$$4a. \quad \forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \frac{2}{\pi(e^x + e^{-x})} > 0$$

donc F est strictement croissante.

De surcroît F est continue sur $\mathbb{R}$, étant que fonction de répartition d'une variable à densité.

Ainsi, F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) [$

et par définition des limites d'une fonction de répartition,

$$\boxed{F \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans }]0, 1[}$$

4b- U est à valeurs dans $]0, 1[$

$$\boxed{U \text{ suit la loi uniforme sur }]0, 1[}$$

$$4c- \text{ on a les équivalences: } F(x) = y \Leftrightarrow \frac{2}{\pi} \arctan(e^x) = y$$

$$\Leftrightarrow e^x = \tan\left(\frac{\pi y}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi y}{2}\right)\right)$$

$$\text{donc } \boxed{\forall x \in]0, 1[, F^{-1}(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 125114

Emplacement QR Code	Code épreuve : 297	Nombre de pages : 24	Session : 2024
	Épreuve de : MATHS Appli EDHEC		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			
45 (suite) -	<pre>import numpy as np def simul-X(): U = rd.random() X = np.log(np.tan(U * np.pi / 2)) return X</pre>		
5a-	X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ converge absolument $x \mapsto f(x)$ est paire donc $x \mapsto x f(x)$ est impaire Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ converge et vaut 0. Ainsi, X admet une espérance et $E(X) = 0$		
5b-			
9 / 24			

6a-g: $t \mapsto t^2 e^{-nt}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt$ est impropre en $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 g(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (t^{\frac{2}{n}})^n e^{-nt} = 0 \quad \text{par croissance comparée}$$

donc $g(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge.

Par critère de négligeabilité pour les intégrales d'intégrandes positives, $\int_1^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt$ converge

$$\text{donc } \boxed{\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt \text{ converge}}$$

avec le changement de variable $u = nt$ licite car affine,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{n}\right)^2 e^{-u} \frac{du}{n} \\ &= \frac{1}{n^3} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du \\ &= \frac{1}{n^3} \Gamma(3) \\ &= \frac{2!}{n^3} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt = \frac{2}{n^3}}$$

7a- soit $x \in \mathbb{R}_+$. Y est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$

$$G(x) = P(Y \leq x) = P(e^X \leq x)$$

$$= P(X \leq \ln(x)) \quad \text{car on réalise une bijection}$$

$$= F(\ln(x)) \quad \text{croissante de } \mathbb{R}_+^* \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \arctan(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

G est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} G(x)$

donc G est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 au moins sur $\mathbb{R}^*$

donc Y est une variable aléatoire à densité

7b- soit $x > 0$. M_n est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$

$$G_n(x) = P(M_n \leq x)$$

$$= P(\max(Y_1, \dots, Y_n) \leq x)$$

$$= P\left(\bigcap_{i=1}^n [Y_i \leq x]\right)$$

$$= \prod_{i=1}^n P(Y_i \leq x) \quad \text{par indépendances}$$

$$= \prod_{i=1}^n G(x) \quad \text{car les } (Y_i)_{i=1, \dots, n} \text{ suivent la même}$$

$$= \left(\frac{2}{\pi} \arctan(x)\right)^n \quad \text{loi que } Y$$

Ainsi,

$$G_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi} \arctan(x)\right)^n & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

7c- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n}{G_n(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\left(1 - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)^n}$ d'après Q1B

$$\text{On, } \left(1 - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan \frac{1}{x} = 0 \quad \text{donc } \ln\left(1 - \arctan \frac{1}{x}\right) \underset{+0}{\sim} \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\underset{+0}{\sim} \frac{1}{x} \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et d'après Q1c}$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n}{G_n(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^{n/x}} = n$$

Alors $\frac{n}{H_n}$ converge en loi vers Z qui suit la loi certaine de paramètre n

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 24

Session : 2024

Épreuve de : Maths Appro EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

exercice 3 :1 - soit $(x, y) \in E \times E$.

$$\bullet \langle f(x), y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i, y \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle \langle u_i, y \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle x, u_i \rangle \langle u_i, y \rangle \quad \text{par symétrie du produit scalaire}$$

$$= \left\langle x, \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, y \rangle u_i \right\rangle$$

$$= \langle x, f(y) \rangle$$

• de surcroît, f est une application de E dans E

• soit $(x, y) \in E \times E$, soit $\mu \in \mathbb{R}$.

$$f(\lambda x + y) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, \lambda x + y \rangle u_i$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i + \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, y \rangle u_i \quad \text{par bilinéarité du produit scalaire}$$

$$= \lambda f(x) + f(y)$$

donc f est linéaire

Grâce aux 3 points précédents, f est un endomorphisme symétrique

2- si les $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont ^{tous} égaux à 1 alors :

$$\forall x \in E, f(x) = \sum_{i=1}^p \langle u_i, x \rangle u_i$$

$$= x \quad \text{car } (u_1, \dots, u_p) \text{ est une base orthonormale}$$

Ainsi, dans ce cas, f est l'application identité et $\forall x \in E, f(x) = x$

3a- soit $x \in \ker(f)$. alors $f(x) = 0_E$

$$\text{Ainsi, } \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i = 0_E$$

3b- d'après le théorème du rang,

$$\text{rg}(f) = \dim E - \dim(\ker(f))$$

soit $x \in E$,

$$\begin{aligned} 5- \quad \|f(x)\|^2 &= \langle f(x), f(x) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i, \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i \right\rangle \\ &= \boxed{\sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \langle u_i, x \rangle^2 u_i^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On, } \|x\| &= \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\left\langle \sum_{i=1}^p \langle u_i, x \rangle u_i, \sum_{i=1}^p \langle u_i, x \rangle u_i \right\rangle} \quad \text{car } (u_1, \dots, u_p) \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^p \langle u_i, x \rangle^2 u_i^2} \quad \text{est une base orthogonale} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \|f(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^p \lambda_i^2} \sqrt{\langle u_i, x \rangle^2 u_i^2}$$

$$\leq K \|x\|$$

$$\text{donc } \boxed{\forall x \in E, \|f(x)\| \leq K \|x\|}$$

7a - montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie où $\mathcal{P}(n): \ll \|x_n\| \leq K^n \|x_0\| \gg$

Initialisation: $\|x_0\| \leq 1 \times \|x_0\|$ donc $\mathcal{P}(1)$ vraie

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

$$\|x_{n+1}\| = \|f(x_n)\| \leq k \|x_n\| \quad \text{car } x_n \in E \text{ et d'après Q6}$$

$$\leq k \times k^n \|x_0\| \quad \text{par hypothèse de récurrence}$$

$$\leq k^{n+1} \|x_0\|$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie ce qui achève la récurrence

7b- par $\dots$ positivité de la norme, on a: $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \|x_n\| \leq k^n \|x_0\|$

$$\text{Or } k \in [0, 1[\text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} k^n \|x_0\| = 0_E$$

$$\text{alors par encadrement, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = 0_E$$

Ainsi, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le vecteur nul de E

7c- d'après Q7a, $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leq k^n \|x_0\|$

$$\text{Or, } \sum_n k^n \|x_0\| = \|x_0\| \sum_n k^n$$

$$\text{Or } \begin{cases} \sum_n k^n \text{ converge (série géométrique de paramètre } k \in]-1, 1[\\ x \mapsto k^x \text{ est à valeurs positives} \end{cases}$$

par critères de majoration pour les séries à termes positifs, $\sum_n \|x_n\|$ converge absolument

Copie anonyme - n°anonymat : 125114

Emplacement QR Code	Code épreuve : 297	Nombre de pages : 24	Session : 2024
	Épreuve de : Maths Appro EDHEC		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Problème :

1a- soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $t \in [0, 1]$.

$$1+t^2 \geq 1 \quad \text{donc} \quad \forall n \in \mathbb{N}, (1+t^2)^{n+1} \geq (1+t^2)^n$$

$$\text{par décroissance de } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \leq \frac{1}{(1+t^2)^n}$$

$$\text{et par croissance de l'intégrale } (0 < 1), \quad \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} \leq \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$

donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

$$\text{De surcroît, } \forall t \in [0, 1], (1+t^2)^n \geq 0 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{(1+t^2)^n} \geq 0$$

et par croissance de l'intégrale, $u_n \geq 0$

donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive

1b- Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_0 = 1$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc d'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

2a- posons $f: x \mapsto 1+x - e^{x/2}$

f est dérivable sur $[0,1]$ et : $\forall x \in [0,1], f'(x) = 1 - \frac{1}{2} e^{x/2}$

On a les équivalences : $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{2} e^{x/2}$

$$\Leftrightarrow 2 \geq e^{x/2}$$

$$\Leftrightarrow \ln 2 \geq \frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \leq 2 \ln 2 \approx 1,3$$

Ainsi,

x	0	1
f		0

car $f(1) = 0$

Ainsi f est positive sur $[0,1]$ donc :

$$\boxed{\forall x \in [0,1], e^{x/2} \leq 1+x}$$

soit n.e.d.,

2b- $\forall t \in [0,1], t^2 \in [0,1]$ donc : $e^{t^2/2} \leq 1+t^2$

et par croissance de $x \mapsto x^n$, $e^{nt^2/2} \leq (1+t^2)^n$

et par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $e^{-nt^2/2} \geq \frac{1}{(1+t^2)^n}$

et en intégrant sur $[0,1]$, il vient par croissance de l'intégrale :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2/2} dt}$$

2c- soit X une variable qui suit une loi normale de paramètre 0 et $\frac{1}{n}$.

sa densité f_x est définie par:

$$f_x(x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} e^{-\frac{nt^2}{2}}$$

Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} e^{-\frac{nt^2}{2}} dt = 1$ car f_x est une densité

$$\text{Finalement, } \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}}$$

2d- On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \int_0^1 e^{-nt^{2/2}} dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^{2/2}} dt \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$$

$\uparrow$
car $t \mapsto e^{-nt^{2/2}}$ est
positive sur $\mathbb{R}$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} = 0$$

donc par encadrement, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$

3- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $h: t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc

$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ est impropre en $+\infty$.

• Soit $n \geq 2$: $t^2 h(t) = \frac{t^2}{(1+t^2)^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^2}{t^{2n}} = \frac{1}{t^{2n-2}}$

$$\text{Ainsi, } \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 h(t) = 0 \text{ donc } h(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$$\text{on } \begin{cases} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \text{ converge (Riemann de paramètre } 2 > 1) \\ t \mapsto \frac{1}{t^2} \text{ positive} \end{cases}$$

par critère de négligeabilité, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ converge pour $n \geq 2$.

• Si $n = 1$: $\frac{1}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est positive

par critère d'équivalence, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)} dt$ converge.

Finalement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \text{ converge}}$

4a- $\forall t \in [1, +\infty[, (1+t^2)^n \geq t^{2n}$ donc par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{t^{2n}}$

et par croissance de l'intégrale : $I_n \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2n}}$

$$\text{On } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2n}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\frac{-1}{(2n-1)t^{2n-1}} \right]_1^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{(2n-1)y^{2n-1}} \\ = \frac{1}{2n-1}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n-1}}$

4b- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$ donc par encadrement, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0}$

4c- $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est positive sur $\mathbb{R}$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq J_n \leq I_n$$

On, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ donc par encadrement, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0}$

5a- $J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ qui converge

$$\text{soit } A > 0. \int_0^A \frac{dt}{1+t^2} = \left[\arctan(t) \right]_0^A = \arctan(A) - \arctan(0) \\ = \arctan(A)$$

$$\text{On } \lim_{A \rightarrow +\infty} \arctan(A) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{donc } \boxed{J_1 = \frac{\pi}{2}}$$

5c- soit $N \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{n=1}^N \frac{J_n}{n} = \sum_{n=1}^N 2(J_n - J_{n+1})$ d'après Q5a
 $= 2(J_1 - J_{N+1})$ par télescope

Copie anonyme - n°anonymat : 125114

Code épreuve : 294

Nombre de pages : 24

Session : 2024

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Maths Applu

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

On $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_{n+1} = 0$ d'après Q4c

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_n}{n}$ converge et vaut $2 \times J_1 = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$

Ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_n}{n} = \pi$

5d- def suite $J(n)$:

```
J = np.pi / 2
for k in range(2, n+1):
    J = (2*k-1) * J / 2 * k
return J
```

6- d'après 5a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_{n+1} = \frac{(2n-1)}{2n} J_n$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H(n)$ est vraie
où $H(n)$: $\ll J_{n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \gg$

Initialisation : $\frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{0}{0}}{4^0} = \frac{\pi}{2} = J_1$

donc $H(1)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ soit vraie. Montrons que $H(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
 J_{n+2} &= \frac{(2n+1)}{2n+2} J_{n+1} = \frac{(2n-1)}{2n+2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
 &= \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n+2)}{(2n+2)} \times \frac{(2n+1)}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{n!n!4^n} \\
 &= \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n+2)!}{4(n+1)^2 n!n! 4^n} \\
 &= \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n+2)!}{4^{n+1} (n+1)!^2} \\
 &= \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}}
 \end{aligned}$$

$H(n+1)$ est vraie ce qui achève la récurrence.

7a- On effectue $2n$ épreuves de Bernoulli ^{indépendantes} où le succès S est "Obtenir un pile" et est de probabilité $1/2$.

Ainsi, $\boxed{X_n \sim \mathcal{B}(2n, \frac{1}{2})}$

7b- $IP(X_n = Y_n) = \frac{IP(X_n = n)}{IP(X_n = n)}$

En admettant que $IP(X_n = Y_n) = \frac{2}{\pi} J_{n+1}$, comme $\lim_{n \rightarrow \infty} J_{n+1} = 0$

alors $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} IP(X_n = Y_n) = 0}$

7c- X_n et Y_n jouent des rôles similaires car la pièce est équilibrée et elles ont la même loi.

Alors, $\boxed{IP(X_n < Y_n) = IP(Y_n > X_n)}$

7d- $\{[X_n < Y_n], [X_n = Y_n], [X_n > Y_n]\}$ est un système complet d'événements.

$$\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}, P(X_n < Y_n) + P(X_n = Y_n) + P(X_n > Y_n) = 1$$

Alors,

$$\text{d'après 7c, } \forall n \in \mathbb{N}, 2P(X_n < Y_n) + P(X_n = Y_n) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{ainsi, } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n < Y_n) &= \frac{1}{2} \left(1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = Y_n) \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n < Y_n) = \frac{1}{2}}$$

8a Z_k prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$ et $P(Z_k = 1) = \frac{1}{2}$

$$\text{Ainsi, } Z_k \sim \mathcal{B}(1, \frac{1}{2})$$

Z_k attribue la valeur 1 si le $k^{\text{ème}}$ lancer est un pile, ainsi $\sum_{k=1}^{2n} Z_k$ renvoie le nombre de piles obtenus en $2n$ lancers.

$$\text{Alors } \boxed{\sum_{k=1}^{2n} Z_k = X_n}$$

$$8b- E\left(\sum_{k=1}^{2n} Z_k\right) = E(X_n) = n$$

$$V\left(\sum_{k=1}^{2n} Z_k\right) = V(X_n) = \frac{n}{2}$$

$$\overline{Z}_n^* = \frac{\sum_{k=1}^{2n} Z_k - E(EZ_k)}{\sqrt{V(EZ_k)}}$$

Sc - on s'assure bien que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n \leq Y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n < Y_n) = \frac{1}{2}$