

Copie anonyme - n°anonymat : 993955

ES-00289
993955
Mat2 Appl1



Code épreuve : 287

Nombre de pages : 19

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Appliquées 2 - ESSEEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I :

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A soit une matrice symétrique, elle est donc diagonalisable (théorème spectral).
Ce qui signifie A est semblable à une matrice diagonale D dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A .

Ainsi, $\exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ tels que : $A = PDP^{-1}$
 $\Rightarrow D = P^{-1}AP$

Or comme D est diagonale, on en déduit que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.

2) on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de $P^{-1}AP$, ce sont donc les valeurs propres de A .
on a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a : $\text{rg}(A) < 3$ car $C_2 = C_3$ et donc A n'est pas inversible $\Rightarrow 0 \in \text{Sp}(A)$

De plus on a que :

$$(A + I_3)X = 0 \text{ où } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ nous donne le système : } \begin{cases} 2x - y - z = 0 \Rightarrow x = y = z \\ -x + y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

D'où : $\dim(E_{-1}) \geq 1$ i.e. $-1 \in \text{Sp}(A)$

$$\text{De même, } (A - 2I_3)X = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x - y - z = 0 \Rightarrow x = -y = -z \\ -x - 2y = 0 \\ -x - 2z = 0 \end{cases}$$

D'où: $\dim(E_2) \geq 1$ ie: $2 \in \text{Sp}(A)$

Ainsi on a que:

$$\text{Sp}(A) = \{-1, 0, 2\}$$

D'où: $E(A) = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|$ où les λ_k sont les valeurs propres de A

$$\approx E(A) = 0 + |-1| + |2| = 3$$

3) def energie(A):

return (np.sum(abs.eigvals(A)))

4) on a: $A = (a_{ij})$ où $(i,j) \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket$ et $B = (b_{ij})$ où $(i,j) \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket$

D'où par produit matriciel:

$$AB = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji}$$

Comme, $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, on en déduit que:

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} \right) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket} a_{ij} b_{ji} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} b_{ji}$$

b) En raisonnant de même, on a que:

$$BA = \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} \text{ et donc : } \text{Tr}(BA) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} \right)$$

$$\text{Tr}(BA) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket} b_{ji} a_{ij}$$

$$\text{Tr}(BA) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket} a_{ij} b_{ji}$$

Ainsi on a bien que: $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$

ii) On a: $A = (a_{ij}) \Rightarrow {}^tA = (a_{ji})$ où $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$

$$\text{D'où: } {}^tAA = \sum_{i=1}^n a_{ji} a_{ij} \text{ et donc: } \text{Tr}({}^tAA) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} a_{ij} \right)$$

$$\text{Soit: } \text{Tr}({}^tAA) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} a_{ji} a_{ij}$$

or comme les éléments sont identiques grâce aux indices, on a que :

$$\text{Tr}({}^tAA) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} a_{ji}^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ji}^2$$

$$\text{iii) Si } \text{Tr}({}^tAA) = 0, \text{ alors, } \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ji}^2 = 0$$

$\Rightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{ji} = 0$ car si une somme de carré est nulle, c'est que tous les éléments sont nuls

$$\text{D'où: } \text{Tr}({}^tAA) = 0 \Rightarrow A = 0$$

c) Soit A et B deux matrices semblables, ie $\exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que: $A = PBP^{-1}$

$$\begin{aligned} \text{D'où: } \text{Tr}(A) &= \text{Tr}(PBP^{-1}) = \text{Tr}(P(BP^{-1})) \\ &= \text{Tr}((BP^{-1})P) \quad (\text{car } \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)) \\ &= \text{Tr}(BI_n) = \text{Tr}(B) \end{aligned}$$

Ainsi, si A et B sont semblables, alors $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$

So) on sait que: $E(A) = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|$ où A est symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\text{or on a: } \text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \Rightarrow |\text{Tr}(A)| = \left| \sum_{i=1}^n a_{ii} \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_{ii}|$$

par l'inégalité triangulaire

or, a_{ii} sont les coefficients diagonaux d'une matrice symétrique, ce sont donc ses valeurs propres.

D'où:

$$\sum_{i=1}^n |a_{ii}| = \sum_{i=1}^n |\lambda_i| = E(A)$$

on a donc bien que: $|\text{Tr}(A)| \leq E(A)$

b) on a: $A = (a_{ij})$ où $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\text{Donc, } A^2 = \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ji} \text{ et donc: } \text{Tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ji} \right)$$

$$\text{or on a que: } A \text{ est symétrique et donc: } \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ji} = \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$$

$$\text{D'où: } \text{Tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)$$

$$\text{De plus, } \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = \lambda_i^2$$

$$\text{Ainsi, } \text{Tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$$

6a) on note A la matrice associée à la commande: $3 \times np.$ eye $(3,3) - np.$ ones $([3,3])$

D'où:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc, } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) on a: } \text{Tr}(A) = 2 + 2 + 2 = 6$$

$$\text{De plus on sait que: } \text{Tr}(A^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$$

on a:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où: } \text{Tr}(A^2) = 6 + 6 + 6 = 18$$

ii) De plus, on a que:

$$A - 3I_3 = - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ qui est non inversible, d'où: } 3 \in \text{Sp}(A)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 993955

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 289

Nombre de pages : 19

Session : 202h

Épreuve de : Mathématiques Appliquées 2 - ESSEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

De même, on a que : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est non inversible car $C_1 = -C_2 - C_3$

D'où : $0 \in \text{Sp}(A)$

Comme, $\dim(E_3) = 3 - \text{rg}(A - 3I_3) = 3 - 1 = 2$ et $\dim(E_0) = 3 - \text{rg}(A) = 3 - 2 = 1$

on a que : $\text{Sp}(A) = \{0, 3\}$ puisque $A \in \Omega_3(\mathbb{R})$

D'où : $E(A) = 0 + 3 + 3 = 6$
car $\dim(E_3) = 2$

Partie II :

7a) def prod2K(u, v, w, A) :

~~$U = \text{np.array}([(u, v), (v, w)])$~~

~~$A = \text{np.array}([(0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 0)])$~~

~~$\text{return}(\text{np.array}([(0, 2, 2, 0, 1, 1), (2, 0, 0, 1, 0, 0), (2, 0, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0, 0)]))$~~

7a) def prod2K(u, v, w, A) :

$U = \text{np.array}([(u, v), (v, w)])$

$\text{return}(\text{np.array}([(u * \text{np.array}(A), v * \text{np.array}(A)), (v * \text{np.array}(A), w * \text{np.array}(A))])$

b) $\gg \gg \text{prod2K}(\quad, -1, \quad, \quad)$

$\text{array}([[-2, 1, 2, -1], [1, -2, -1, 2], [2, -1, 4, 2], [-1, 2, 2, -4]])$

8) on a : $Y = \begin{pmatrix} aX \\ bX \end{pmatrix}$ et donc :

$$(U \otimes A)Y = \begin{pmatrix} auAX + bvAX \\ avAX + bwAX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (auA + vA)X \\ (avA + wA)X \end{pmatrix}$$

Or on sait que X est un vecteur propre de A pour la valeur propre μ .

D'où : $AX = \mu X$

Donc, $\begin{pmatrix} (auA + bvA)X \\ (avA + bwA)X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (au + bv)AX \\ (av + bw)AX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (au + bv)\mu X \\ (av + bw)\mu X \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} (au + bv)X \\ (av + bw)X \end{pmatrix}$

on a donc bien que : $(U \otimes A)Y = \mu \begin{pmatrix} (au + bv)X \\ (av + bw)X \end{pmatrix}$

b) on sait que :

Y est vecteur propre de $U \otimes A \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $(U \otimes A)Y = \lambda Y$

Or on a : $(U \otimes A)Y = \mu \begin{pmatrix} (au + bv)X \\ (av + bw)X \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aX \\ bX \end{pmatrix} = (\mu U)Y$

Ainsi, Y est vecteur propre de $(U \otimes A)$ pour la valeur propre μU .

9a) on sait que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est vecteur propre de U et X vecteur propre de A .

b) $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $Y_i = \begin{pmatrix} aX_i \\ bX_i \end{pmatrix}$ et $Z_i = \begin{pmatrix} cX_i \\ dX_i \end{pmatrix}$

D'où : $(Y_1, Z_1, \dots, Y_n, Z_n) = \left(\begin{pmatrix} aX_1 \\ bX_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} cX_1 \\ dX_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} aX_n \\ bX_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} cX_n \\ dX_n \end{pmatrix} \right)$

$$\Rightarrow \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} x_1, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} x_1, \dots, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} x_n, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} x_n \right)$$

$$\Rightarrow \left(x_1 \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right), \dots, x_n \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) \right)$$

or on sait que : $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\Omega_{2,1}(\mathbb{R})$, c'est donc une famille libre.

De même, la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre dans $\Omega_{n,1}(\mathbb{R})$.

or on a :

$$\left(x_1 \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right), \dots, x_n \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) \right) = \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) \left[(x_1, \dots, x_n) \right]$$

Ainsi on a que : $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) \left[(x_1, \dots, x_n) \right]$ est une famille libre.

$$\Rightarrow (y_1, z_1, \dots, y_n, z_n) \text{ est une famille libre}$$

c)

d) on sait que : $(U \times A)$ est semblable à la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont :

$$y_1 p_1, y_2 p_1, \dots, y_1 p_n, y_2 p_n$$

$$\text{D'où : } E(U \times A) = \sum_{k=1}^n |y_1 p_k| + \sum_{k=1}^n |y_2 p_k|$$

or on sait que : y_1 et y_2 sont les valeurs propres associées à $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ (des vecteurs propres de U)
 $p_1, \dots, p_n$ celles de $x_1, \dots, x_n$ (des vecteurs propres de A)

$$\text{D'où : } E(U) = |y_1| + |y_2| \text{ et } E(A) = |p_1| + \dots + |p_n|$$

Donc, on a que :

$$\begin{aligned} E(U) \times E(A) &= (|y_1| + |y_2|) (|p_1| + \dots + |p_n|) \\ &= |y_1 p_1| + |y_2 p_1| + \dots + |y_1 p_n| + |y_2 p_n| \end{aligned}$$

on a donc bien que :

$$E(U * A) = E(U) \times E(A)$$

1a) cherchons $U = \begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix} \in \Omega_2(\mathbb{R})$ telle que : $A_{2n} = U * A_n$

on a :

$$U * A_n = \begin{pmatrix} u A_n & v A_n \\ v A_n & w A_n \end{pmatrix} = A_{2n}$$

on trouve les matrices d'adjacences de G_n et G_8

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$A = A_8 =$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \times A_n \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \times A_n \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} 1 \times A_n \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \times A_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

on a donc que : $A_8 = U * A_n$ où $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ainsi on sait que :

$$A_{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A_n$$

b) on a que : $E(A_{2n}) = E\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A_n\right) = E\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \times E(A_n)$ (question 1a)

Or on a :

$$E\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = ?$$

on a $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda I_2\right) = (1-\lambda)(-\lambda) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad \Rightarrow \Delta = 5 > 0$$

D'où : $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Ainsi on a que : $E\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| + \left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

on a donc bien que : $E(A_{2n}) = \sqrt{5} E(A_n)$

Copie anonyme - n°anonymat : 993955

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 19

Session : 2024

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques Appliquées 2 - ESTEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie III :

11a) on a : $A = (a_{ij})$ où $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ qui est la matrice d'adjacence d'un graphe $G(A)$.

Ainsi la matrice prend des coefficients 1 (s'il y a une arête entre les 2 sommets) et 0 sinon

$$\text{D'où : } \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} = \sum_{(i, j) \in I^2} a_{ij} + \sum_{(i, j) \notin I^2} a_{ij}$$

or comme $(i, j) \notin I^2 \Rightarrow a_{ij} = 0$ car le sommet est isolé, donc il n'a aucune arête

$$\text{Ainsi, } \sum_{(i, j) \notin I^2} a_{ij} = 0$$

$$\text{Donc on a bien que : } \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} = \sum_{(i, j) \in I^2} a_{ij} = 2m \quad \left| \begin{array}{l} \text{car il y a } m \text{ arêtes et donc } 2m \\ \text{coefficients } 1 \text{ dans la matrice } A \end{array} \right.$$

non (car chaque arête vaut 1 pour 2

b) Il y a n sommets et $n - p$ sommets isolés. Donc, p sommets isolés. sommets dans le graphe).

or, $\text{Card}(I) = p$ (énoncé)

De plus,

12a) A est symétrique donc diagonalisable (théorème spectral) et donc semblable à une matrice diagonale

La car c'est une matrice d'adjacence.

on note D la matrice diagonale.

Donc, $\exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ tels que : $A = PDP^{-1}$ ie : $D = P^{-1}AP$

or, D est diagonale et non nulle (car $A \notin \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{Sp}(A) \neq \{0\}$) et donc :

$P^{-1}AP$ est diagonale

b) on sait que : $\text{tr}(D) = \text{tr}(A)$ car les deux matrices sont semblables (question 4c)

De plus, A est la matrice d'adjacence d'un graphe non bouclé, donc :

$$a_{ii} = 0 \quad \forall i \in [1, n]$$

$$\text{D'où : } \text{tr}(A) = 0 + \dots + 0 = 0$$

Ainsi, on a bien que : $\text{tr}(D) = 0$

ii) De plus, on a que :

$$\text{tr}(A^2) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ji}^2 \quad (\text{question 4b})$$

$$\text{or, } A \text{ est symétrique et donc } {}^tA = A \text{ et donc : } \text{tr}(A^2) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ji}^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2$$

$$\text{De plus on a que : } A^2 = PD^2P^{-1} \Rightarrow D^2 = P^{-1}A^2P$$

$$\Rightarrow \text{Tr}(D^2) = \text{Tr}(A^2) \quad (\text{car } D^2 \text{ et } A^2 \text{ semblables})$$

or, comme les éléments sont des 1 ou des 0 (en tant que matrice d'adjacence), on a que :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} = 2m \quad (\text{question 1a})$$

$$\text{on a donc bien que : } \text{tr}(D^2) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 = 2m$$

13a) Soit E_k , on a que k représente un sommet isolé de $G(A)$.

Ainsi, $A(E_k) = 0$ (l'élément k de la matrice d'adjacence A de $G(A)$).

$$\text{D'où : } A(E_k) = 0 \Rightarrow E_k \in \text{Ker}(A) \quad \text{ie : } E_k \in \text{Ker}(A)$$

ii) on a donc que :

$$\dim(E_p) \leq \dim(\text{Ker}(A))$$

Or on a : $n - p$ sommets isolés et donc : $\dim(E_p) = n - p$

$$\text{Ainsi on a bien que : } n - p \leq \dim(\text{Ker}(A))$$

iii) Soit $p < n$, on a que :

b) on sait que :

$$\text{tr}(A^2) = \text{tr}(D^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \quad (\text{question 5b})$$

$$\text{or, on a : } \text{tr}(D^2) = 2m \quad (\text{question 12b})$$

Ainsi on a bien que :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 = 2m$$

$$\text{or, } \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 = \sum_{k=1}^p \lambda_k^2 + \sum_{k=p+1}^n \lambda_k^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=p+1}^n \lambda_k^2 = 0 \quad \text{car } p < n \quad (\text{question 13a})$$

$$\text{D'où : } \sum_{k=1}^p \lambda_k^2 = 2m$$

ii) on sait que $P \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \Rightarrow$ au moins un de ses éléments diagonaux est strict positif.
 $\Rightarrow$ ce sera donc le plus grand de tous.

Or comme les éléments diagonaux de D sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$; on a que :

$$0 < \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} (\lambda_k) \quad \text{ie : } 0 < \theta$$

$$\text{De plus : } \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} (\lambda_k) \leq \sqrt{\sum_{k=1}^p \lambda_k^2}$$

car le plus grand élément diagonal est inférieur à la somme (ce sont des 1 donc la racine change rien).

$$\text{D'où : } 0 < \theta \leq \sqrt{2m}$$

c) on a : $(x_1, x_2, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$

$$\sum_{1 \leq i, j \leq r} (x_i - x_j)^2 \geq 0 \quad (\text{somme de carrés})$$

$$\Rightarrow \sum_{1 \leq i, j \leq r} (x_i^2 - 2x_i x_j + x_j^2) \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{1 \leq i, j \leq r} (x_i^2 + x_j^2) - \sum_{1 \leq i, j \leq r} 2x_i x_j \geq 0 \quad (\text{linéarité de la somme})$$

$$\text{D'où : } \boxed{\sum_{1 \leq i, j \leq r} (x_i^2 + x_j^2) \geq \sum_{1 \leq i, j \leq r} 2x_i x_j}$$

ii) Ainsi on a que :

d)

14) on a :

$$Q^{-1} = ({}^t P)^{-1} = {}^t (P^{-1}) = {}^t Q \quad \text{ie : } \boxed{Q^{-1} = {}^t Q} \quad \text{par les propriétés de la transposée}$$

ii) on a de plus que :

$$A = P D P^{-1} \quad (\text{question 12a}) \quad \text{et} \quad Q = {}^t P = P^{-1} \quad \text{ie : } Q^{-1} = (P^{-1})^{-1} = P$$

$$\text{D'où : } A = P D P^{-1} = Q^{-1} D Q$$

or, comme $Q^{-1} = {}^t Q$ (vu précédemment), on a que :

$$\boxed{A = {}^t Q D Q}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 993955

Emplacement QR Code	Code épreuve : 284	Nombre de pages : 19	Session : 2024
	Épreuve de : Mathématiques Appliquées 2 - ESSEC		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

iii) on a :

$${}^t Y Y = {}^t (Q X) Q X = {}^t X {}^t Q Q X = {}^t X Q^{-1} Q X \quad (\text{car } {}^t Q = Q^{-1} : \text{question 14})$$

D'autre :

$${}^t Y Y = {}^t X I_n X = {}^t X X$$

b) on a :

$$\begin{aligned} {}^t X A X &= {}^t X ({}^t Q D Q) X = ({}^t X {}^t Q) D (Q X) \\ &= {}^t (Q X) D (Q X) \quad (\text{par les propriétés de la transposée}) \\ &= {}^t Y D Y \end{aligned}$$

Ainsi on a bien que : ${}^t X A X = {}^t Y D Y$

$$\begin{aligned} \text{ii) De plus : } {}^t Y D Y &= (y_1 \dots y_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ {}^t Y D Y &= (y_1 \lambda_1 \dots y_n \lambda_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$${}^t Y D Y = y_1^2 \lambda_1 + \dots + y_n^2 \lambda_n$$

on a donc bien que : ${}^t X A X = {}^t Y D Y = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2$

c) on a donc : ${}^t X A X = \sum_{k=1}^n y_k^2 \lambda_k \leq \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} (\lambda_k) \sum_{k=1}^n y_k^2$

D'ici :

$${}^t X A X \leq \theta \sum_{k=1}^n y_k^2$$

Comme : $\sum_{k=1}^n y_k^2 = {}^t Y Y$, on a bien que : ${}^t X A X \leq \theta {}^t Y Y = \theta {}^t X X$ (question 14a)

(5a) on a :

$$U = (u_{ij}) \text{ où } j \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ on a que : } \begin{cases} u_{ii} = 1 \text{ si } i \text{ n'est pas isolé} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

or : $i \text{ n'est pas isolé} \Rightarrow i \in I$

Ainsi on a que :

$${}^t U A U = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} = \sum_{(i, j) \in I^2} a_{ij} = 2m$$

(grâce à la question 11a et car $u_{ii} = 1$ si $i \in I$)ii) on sait que : ${}^t U A U = 2m$ 

b) on a que :

$$\frac{\sqrt{2m}}{p} - \frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{2m} - \sqrt{p}}{p}$$

$$\text{or, } 2m \leq \theta p \text{ et donc : } \sqrt{2m} \leq \sqrt{\theta} \sqrt{p} \Rightarrow \frac{\sqrt{2m} - \sqrt{p}}{p} \geq \frac{\sqrt{p}(\sqrt{\theta} - 1)}{p}$$

or on sait que : $\theta \geq 1$ car c'est un entier strictement positif (question 13b)

D'ici :

$$\sqrt{\theta} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{p}(\sqrt{\theta} - 1)}{p} \geq 0 \text{ ie : } \frac{\sqrt{2m}}{p} - \frac{1}{\sqrt{p}} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2m}}{p} \geq \frac{1}{\sqrt{p}}$$

ii) De plus on a :

$$\frac{\theta}{\sqrt{2m}} - \frac{\sqrt{2m}}{p} = \frac{\theta p - 2m}{\sqrt{2m} p} \quad \text{or, on a : } \frac{2m}{p} \leq \theta \Rightarrow 2m \leq p\theta \quad (915a)$$

$$\text{D'au : } \theta p - 2m \geq 0 \Rightarrow \frac{\theta p - 2m}{\sqrt{2m} p} \geq 0 \quad (\text{car } \sqrt{2m} p \geq 0)$$

$$\text{ie : } \frac{\theta}{\sqrt{2m}} - \frac{\sqrt{2m}}{p} \geq 0$$

$$\text{D'au : } \frac{\theta}{\sqrt{2m}} \geq \frac{\sqrt{2m}}{p}$$

iii) Enfin, on a :

$$1 - \frac{\theta}{\sqrt{2m}} = \frac{\sqrt{2m} - \theta}{\sqrt{2m}} \quad \text{et } \sqrt{2m} \geq \theta \quad (\text{question 13b})$$

$$\text{D'au : } 1 - \frac{\theta}{\sqrt{2m}} \geq 0 \quad (\text{car } \sqrt{2m} \geq 0) \Rightarrow 1 \geq \frac{\theta}{\sqrt{2m}}$$

on a donc bien que :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{p}} \leq \frac{\sqrt{2m}}{p} \leq \frac{\theta}{\sqrt{2m}} \leq 1}$$

16a) Soit $\forall x \in [0, 1]$, $F(x) = x + \sqrt{(p-1)(1-x^2)}$ qui est dérivable sur $[0, 1]$.

D'au :

$$F'(x) = 1 + \frac{-2x(p-1)}{2\sqrt{(p-1)(1-x^2)}} = 1 - \frac{x(p-1)}{\sqrt{(p-1)(1-x^2)}} = 1 - \frac{x\sqrt{p-1}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$F'(x) = 1 - x \sqrt{\frac{p-1}{1-x^2}} \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$\text{D'au : } F(x) \geq F(0) \quad \text{car } F \text{ est croissante sur } [0, 1]$$

$$\boxed{\forall x \in [0, 1] \Rightarrow F(x) \geq \sqrt{p-1}}$$

b) D'au :

$$E(A) \leq \theta + \sqrt{(p-1)(2m - \theta^2)} \quad (\text{question 13d})$$

$$\Rightarrow E(A) \leq \frac{2m}{p} + \sqrt{(p-1)(2m - (\frac{2m}{p})^2)}$$

$$\text{D'au : } \frac{2m}{p} + \sqrt{(p-1)2m(1 - \frac{2m}{p^2})} = \frac{2m}{p} + \sqrt{(p-1)\frac{2m}{p^2}(p^2 - 2m)} = \frac{2m}{p} + \frac{1}{p} \sqrt{(p-1)2m(p^2 - 2m)}$$

$$\text{Donc on a bien que : } \boxed{E(A) \leq \frac{2m}{p} + \frac{1}{p} \sqrt{(p-1)(2m(p^2 - 2m))}}$$

17a) on a que A est la matrice d'adjacence d'un graphe complet. Chaque sommet est donc relié à tous les autres mais pas à lui-même.

D'où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

b) on a : $A + I_n = J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ qui est non inversible (toutes les colonnes égales)

D'où : $-1 \in \text{Sp}(A)$

car $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

De plus on a que : $\dim(E_{-1}) = n - \text{rg}(A + I_n)$
 or, $\text{rg}(A + I_n) = 1$ (toutes les colonnes sont égales)

on a donc bien que : $\dim(E_{-1}) = n - 1$

c) on a : $A - (n-1)I_n = \begin{pmatrix} 1-n & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1-n \end{pmatrix}$

or on a que : $-c_2 + c_3 + \dots + c_n = -c_1$ ie : $\text{rg}(A - (n-1)I_n) < n$

or, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$\Rightarrow A$ n'est pas inversible

D'où : $(n-1) \in \text{Sp}(A)$

on a de plus que : $\dim(E_{n-1}) = n - \text{rg}(A - (n-1)I_n)$

or, comme on a que : $-c_2 + \dots + c_n = -c_1$ (c_i désigne la colonne i)

on en déduit que : $\text{rg}(A - (n-1)I_n) = (n-1)$ et donc :

$\dim(E_{n-1}) = n - (n-1) = 1$

ii) Ainsi, on a que : $E(A) = |(n-1)| + \underbrace{|-1| + \dots + |-1|}_{n-1 \text{ fois car } \dim(E_{-1}) = n-1}$

D'où : $E(A) = (n-1) + (n-1) = 2(n-1)$

Copie anonyme - n°anonymat : 993955

Code épreuve : 284

Nombre de pages : 19

Session : 2024

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques Appliquées 2 - ESSEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

iii) on a avec la question 16 b et $p = n$ et $m = \frac{n(n-1)}{2}$, que :

$$\begin{aligned} \frac{2m}{p} + \frac{1}{p} \sqrt{(p-1)2m(p^2-2m)} &= \frac{n(n-1)}{n} + \frac{1}{n} \sqrt{(n-1)n(n-1)(n^2-n^2+n)} \\ &= (n-1) + \frac{1}{n} \sqrt{n^2(n-1)^2} = (n-1) + \frac{n}{n}(n-1) \\ &= 2(n-1) \end{aligned}$$

on a donc bien que : $E(A) \leq 2(n-1)$ ie : (1) devient une égalité

(18) /

(19)

b) on a $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $|x_j|(a+b) \geq x_j^2 + a\beta$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{j=1}^p |x_j|(a+b) &\geq \sum_{j=1}^p (x_j^2 + a\beta) \\ \Rightarrow (a+b) \sum_{j=1}^p |x_j| &\geq \sum_{j=1}^p x_j^2 + p a \beta \end{aligned}$$

or, $E(A) = \sum_{j=1}^p |x_j|$ et $\sum_{j=1}^p x_j^2 = \text{Tr}(A^2)$ grâce à la question 5b)

Ainsi, on a que :

$$(\alpha + \beta) E(A) \geq \text{tr}(A^2) + p\alpha\beta$$

ii) D'où :

$$E(A) \geq \frac{\text{tr}(A^2) + p\alpha\beta}{(\alpha + \beta)} \quad ((\alpha + \beta) \neq 0)$$

Or on sait que : $\text{tr}(A^2) = \sum_{j=1}^p \lambda_j^2 = \sum_{(i,j) \in I^2} a_{ij} = 2m$ (question 4b et 11a)

Donc on a bien que :

$$E(A) \geq \frac{2m + p\alpha\beta}{(\alpha + \beta)}$$

c) Soit $\varphi(t) = \frac{a+bt}{b+t} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$

on a que :

$$\varphi'(t) = \frac{b(b+t) - (a+bt)}{(b+t)^2} = \frac{b^2 + \cancel{bt} - a - \cancel{bt}}{(b+t)^2} = \frac{b^2 - a}{(b+t)^2}$$

or, $b^2 \geq a$ et donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \varphi'(t) \geq 0 \quad \left| \quad \text{car } (b+t)^2 \geq 0 \right.$$

d) Ainsi, on a que :

$$\frac{2m + p\alpha\beta}{\alpha + \beta} \geq 0 \quad \text{ie : } 2m \geq p\alpha\beta$$

or, $\alpha \leq \beta^2$ (question 9c) et donc :

ii) on a :

$$E(A) \geq \frac{2m + p\alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

$$\text{or, } \frac{2m + p\alpha\beta}{\alpha + \beta} \geq \frac{2m + p\beta^2}{2\beta} \geq \frac{4m}{2\beta} = \frac{2m}{\beta}$$

