



Z7-00180
817224
Mat Appli

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 24

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Appliquées EMLyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 2

Partie A

2) a) L'ensemble de fonctions solutions de $x'(t) = -x(t)$ est :

$$\left\{ t \mapsto C_1 e^{-t}, C_1 \in \mathbb{R} \right\} //$$

b) x_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$x'(t) = x(t) \Leftrightarrow a e^{-t} - (at+b)e^{-t} + (at+b)e^{-t} - e^{-t} = 0$$

$$\Leftrightarrow a e^{-t} - e^{-t} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-t}(a-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \quad \text{car } e^{-t} \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ainsi, $x_0: t \mapsto t e^{-t}$ est bien une solution particulière de (E) //

c) Par principe de superposition, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\left\{ t \mapsto C_1 e^{-t} + t e^{-t}, C_1 \in \mathbb{R} \right\} //$$

2) a) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ on a bien $X'(t) = AX(t)$

A est triangulaire donc $S_p(A) = \{-1\}$

On suppose A diagonalisable, pas $\exists P$ inversible tel que:

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\text{d'où } A = -PP^{-1}$$

$$\text{d'où } A = -I_2 \quad \text{ce qui est faux!}$$

Ainsi, A n'est pas diagonalisable //

b) Le théorème de Cauchy assure l'unicité de la solution telle que $x(0)=1$ et $y(0)=1$ //

c) D'après 2) a), Les solutions de $y'(t) = -y(t)$ sont sous la forme $t \mapsto C_1 e^{-t}$, $C_1 \in \mathbb{R}$

Donc avec $y(0)=1$, on a $C_1 e^0 = 1 \Rightarrow C_1 = 1$

La solution de y tel que $y(0)=1$ est $t \mapsto e^{-t}$

Toujours d'après 2) mais ici c), Les solutions de $x'(t) = -x(t) + e^{-t}$ sont sous la forme:

$$t \mapsto C_1 e^{-t} + t e^{-t}, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

Donc avec $x(0)=1$, on a $C_1 e^0 = 1 \Rightarrow C_1 = 1$

La solution de x tel que $x(0)=1$ est $t \mapsto e^{-t} + t e^{-t}$

Ainsi, la solution (x, y) vérifiant $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$ est:

$$(x, y) = (\bar{e}^{-t} + t\bar{e}^{-t}, \bar{e}^{-t}) //$$

d) Par croissance comparée, $t\bar{e}^{-t} = \frac{t}{e^t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$

De plus, $\bar{e}^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$

Ainsi, $(\bar{e}^{-t} + t\bar{e}^{-t}, \bar{e}^{-t})$ converge vers l'état d'équilibre $(0, 0)$ //

3) `import numpy as np`
`import matplotlib.pyplot as plt`

`T = np.linspace(-2, 20, 200)`

`x = [np.exp(-t) + t*np.exp(-t) for t in T]`

`y = [np.exp(-t) for t in T]`

`plt.title("Trajectoire de la solution")`

`plt.plot(T, (x, y))`

`plt.show()`

Partie B

4) a) Soit $h \in \mathbb{N}^*$

$$(x+t)e^{hx} \sim x(e^h)^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 \quad \text{par croissance comparée}$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f_h(x) = 0 //$$

$$h > 0 \text{ donc } e^{hx} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{donc par produit: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_h(x) = +\infty //$$

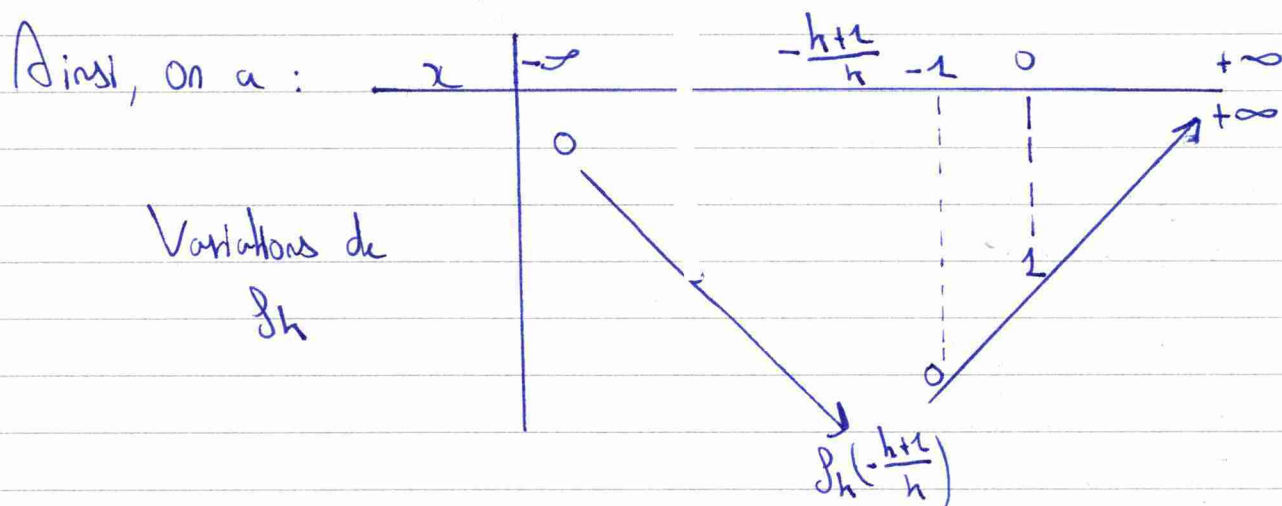
b) f_h est dérivable sur $\mathbb{A}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{A}$

$$\text{Soit } x \in \mathbb{A}, \quad f_h'(x) = e^{hx} + h(x+1)e^{hx} \\ = e^{hx}(hx + h + 1)$$

Donc f_h' est du signe de $hx + h + 1$ car $e^{hx} > 0$

$$\text{et } hx + h + 1 > 0 \Leftrightarrow hx > -h - 1 \\ \Leftrightarrow x > -\frac{h+1}{h} \quad \text{car } h > 0$$

$$\text{De plus, } f_h(-1) = 0 \quad \text{et } f_h(0) = 1 \quad \text{et } -\frac{h+1}{h} < -1$$



5) a) Soit $h \in \mathbb{N}^*$,
Soit $x \in \mathbb{A}$

$$f_{h+1}(x) - f_h(x) = (x+1)e^{(h+1)x} - (x+1)e^{hx} \\ = (x+1)e^{hx}(e - 1)$$

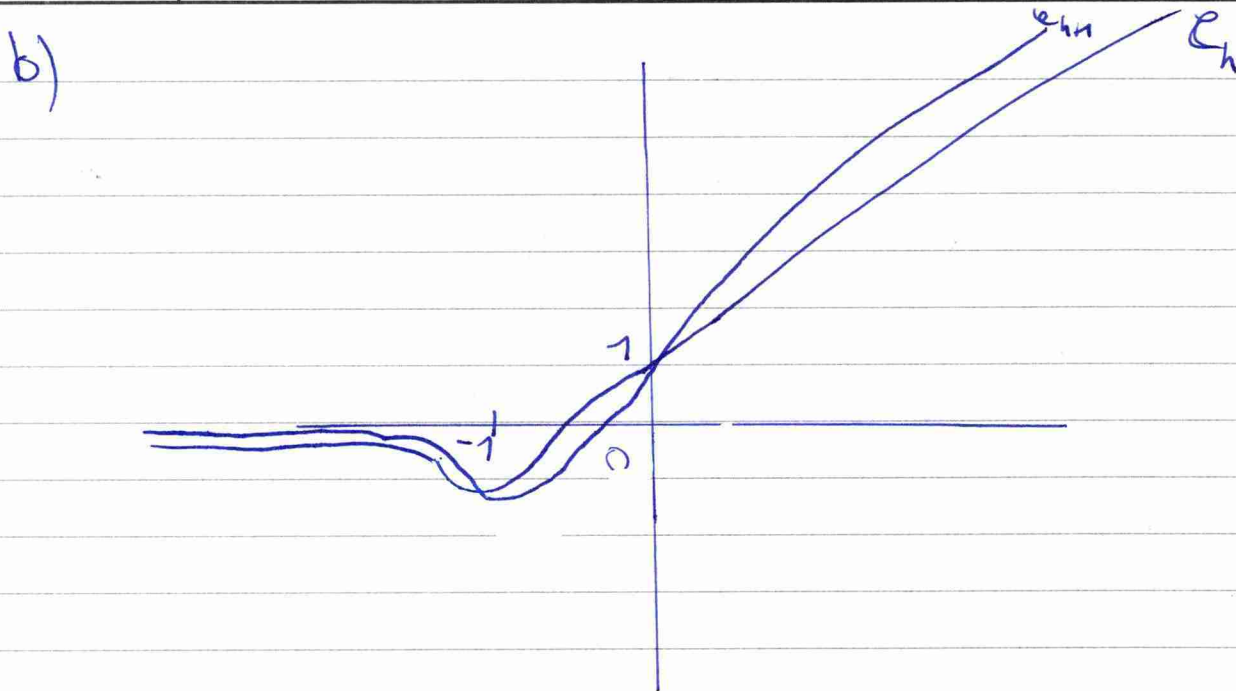
Donc les points d'intersection sont en -1 et 0 //

De plus

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x+1$	-	+	+	
$e^x - 1$	-	-	+	
$(x+1)(e^x - 1)$	+	-	+	

Donc $\mathcal{E}_h$ est au dessus de $\mathcal{E}_{h+1}$ sur $] -1, 0[$ uniquement //

Emplacement QR Code	Code épreuve : 246	Nombre de pages : 24	Session : 2024
	Épreuve de : Mathématiques appliquées - EN Lyon		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			



Partie C

b) a) Sur $[0, +\infty[$, f_h est continue car dérivable et strictement croissante.
Donc f_h réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[f_h(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f_h(x)[$, soit une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$.

Or, $k \in \mathbb{N}^* \subset [1, +\infty[$ donc d'après le théorème de la bijection :

Il existe un unique u_n sur $[0, +\infty[$ tel que $f_h(u_n) = k$.

De plus, $\forall n (0, f_h(u_n) \leq 1$

Donc $f_h(u) \leq 1 \leq k$

Ainsi, il n'existe aucune solution de $f_h(x) = h$ sur $] -\infty, 0[$

Donc, u_h est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ tel que $f_h(u_h) = h$ //

b) On cherche $u_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f(u_1) = 1$

Or, on sait que $f_h(0) = 1$ et d'après 6) a), u_1 est unique

Ainsi, $u_1 = 0$ //

7] On a : $f_h(0) = 1$

$$f_h(u_h) = h$$

$$f_h\left(\frac{h(h)}{h}\right) = \left(\frac{h(h)}{h} + 1\right)e^{\frac{h(h)}{h}}$$

$$= h(h) + h, \quad h \text{ car } h > 1 \Rightarrow h(h) > 0$$

Ainsi on a : $f_h(0) \leq f_h(u_h) \leq f_h\left(\frac{h(h)}{h}\right)$

Or f_h est croissante sur $\mathbb{R}_+$ ce qui implique $\forall h \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq u_h \leq \frac{h(h)}{h} //$$

Par croissance comparée, $\frac{h(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} 0$ donc d'après le théorème d'encadrement (u_h) converge et :

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} u_h = 0 //$$

8) a) Soit $h \in \mathbb{N}^*$

$$f_h(u_n) = h \Leftrightarrow (u_{n+1})e^{hu_n} = h$$

$$\Leftrightarrow e^{hu_n} = \frac{h}{u_{n+1}} \quad \text{car } u_{n+1} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow hu_n = P_n\left(\frac{h}{u_{n+1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{P_n\left(\frac{h}{u_{n+1}}\right)}{h} \quad \text{car } h \neq 0$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{P(h)}{h} - \frac{P(u_{n+1})}{h} \quad // \quad \text{propriété de } P_n$$

b) D'après le tableau de variation, $\forall h \in \mathbb{N}^*$, $u_h > 0$

~~Donc $u_{n+1} > 1$ d'où $P(u_{n+1}) > 0$~~

~~Ainsi, $\frac{P(h)}{h} - \frac{P(u_{n+1})}{h} > \frac{P(h)}{h}$~~

$$\text{On a : } \frac{P(h)}{h} - \frac{P(u_{n+1})}{h} < u_n < \frac{P(h)}{h}$$

$$\text{d'où } 1 - \frac{P(u_{n+1})}{P(h)} < \frac{u_n}{\frac{P(h)}{h}} < 1 \quad \text{car } \frac{h}{P(h)} > 0$$

$$\text{Or } u_n \xrightarrow[h \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{et } P(h) \xrightarrow[h \rightarrow +\infty]{} +\infty \quad \text{donc } 1 - \frac{P(u_{n+1})}{P(h)} \xrightarrow[h \rightarrow +\infty]{} 1$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $\frac{u_n}{\frac{P(h)}{h}} \xrightarrow[h \rightarrow +\infty]{} 1$

$$\text{Donc : } u_n \underset{h \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{P(h)}{h} //$$

9) À partir de $h = 3)e$

$$\text{On a : } \frac{1}{h} \leq \frac{h(h)}{h}$$

Or $\sum_{h \geq 1} \frac{1}{h}$ diverge comme série harmonique donc par critère de comparaison des séries à termes positifs :

$$\sum_{h \geq 1} \frac{h(h)}{h} \text{ diverge}$$

et comme $U_h \sim \frac{h(h)}{h}$ donc $\sum_{h \geq 1} U_h$ et $\sum_{h \geq 1} \frac{h(h)}{h}$ sont de même nature

Ainsi, $\sum_{h \geq 1} U_h$ diverge //

Emplacement QF Code	Code épreuve : 296	Nombre de pages : 24	Session : 2024
	Épreuve de : Mathématiques Appliquées - EN Lyon		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Exercice 2

Partie A

1) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -I_2$ d'où $A \cdot (-A) = I_2$

Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = -A //$

2) Soit $x \in \mathbb{A}$, $P: x \mapsto x^2 + 1$ est un polynôme annulateur de A qui n'admet aucune racine dans $\mathbb{A}$ donc aucune valeur propre possible pour A

Ainsi, A n'est pas diagonalisable //

3) On a $\mathcal{C} \in M_2(\mathbb{A})$

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{A})$, $AM = MA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -c \\ a = d \end{cases}$

9/24

Ainsi, $\mathcal{E} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ i.e $\mathcal{E} = \text{Vect}(I_2, A)$

Donc $\mathcal{E}$ est bien un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ //

4) a) Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$, $AM = MA \Leftrightarrow M = aI_2 + bA$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}$

D'où $AM = MA \Leftrightarrow \text{Vect}(I_2, A)$ //

b) (I_2, A) est une famille génératrice de $\mathcal{E}$ et de plus, I_2 et A ne sont pas colinéaires.

Donc (I_2, A) est une base de $\mathcal{E}$ //

5) a) Soient $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$ alors $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a', b') \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$M = aI_2 + bA \text{ et } N = a'I_2 + b'A$$

Ainsi, $MN = (aI_2 + bA)(a'I_2 + b'A)$

$$= aa'I_2 + ab'A + ba'I_2 + bb'A^2$$

Or $A^2 = -I_2$

Donc $MN = (aa' + ba' - bb')I_2 + ab'A$

Donc $MN \in \text{Vect}(I_2, A)$ i.e $MN \in \mathcal{E}$ //

b) On reprend les mêmes M et N que la question 5) a)

$$\text{On a } MN = (aa' + ba' - bb')I_2 + ab'A$$

$$\text{or } NM = (a'I_2 + b'A)(aI_2 + bA)$$

$$= aa'I_2 + a'bA$$

b)

6)

Partie D

$$\begin{aligned} 7) a) M^2 &= (aI_2 + bA)(aI_2 + bA) = a^2 I_2 + abA + baA + b^2 A^2 \\ &= a^2 I_2 + abA + baA - b^2 I_2 \text{ d'après 1)} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } M^2 = (a^2 - b^2)I_2 + 2abA //$$

$$b) P(M) = 0_2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)I_2 + 2abA + u a I_2 + v b A + w I_2 = 0_2$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2 + ua + v)I_2 + (2ab + vb)A = 0_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + ua + v = 0 \\ 2ab + vb = 0 \end{cases} \quad \text{car } (I_2, A) \text{ est Pibk} //$$

8) a)

Copie anonyme - n°anonymat : 817224

Emplacement QR Code	Code épreuve : 296	Nombre de pages : 24	Session : 2024
	Épreuve de : Mathématiques Appliquées EM-Lyon		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Partie C

10) Soit $M \in M_2(\mathbb{M})$, $\varphi(M) \in M_2(\mathbb{M})$ comme produit de matrices de $M_2(\mathbb{M})$

Soit $M, N \in M_2(\mathbb{M})$, $\lambda \in \mathbb{M}$

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda M + N) &= A(\lambda M + N)A \\ &= \lambda AMA + ANA \\ &= \lambda \varphi(M) + \varphi(N)\end{aligned}$$

Ainsi, φ est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{M})$ //

11) Soit $M \in M_2(\mathbb{M})$

$$\begin{aligned}\varphi \circ \varphi(M) &= \varphi(AMA) \\ &= A^2 M A^2\end{aligned}$$

$$= I_2 \quad \varphi(M) \text{ est inversible donc } \varphi \text{ est bijectif} //$$

$$\underline{\varphi^{-1}(\varphi(M)) = M} //$$

$$\begin{aligned}
 12) a) \varphi(E_1) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E_4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi(E_2) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi(E_3) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi(E_4) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -E_1
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } B = \text{Mat}(\varphi)_{(E_1, E_2, E_3, E_4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) B est symétrique donc B est diagonalisable //

B est bilinéaire donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux

Donc $\text{Sp}(B) = \{-1, 1\}$ //

c) $B^2 = I_4$ donc B

Copie anonyme - n°anonymat : 817224

Emplacement QR Code	Code épreuve : 296	Nombre de pages : 24	Session : 2024
	Épreuve de : Mathématiques Appliquées EMLyon		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Exercice 3

Partie A

2) Soit $h \in \mathbb{N}^*$, $X_h(\omega) = [1, N]$

Les tirages sont fait avec remise et les boîtes blanches de façon équiprobable

Donc $X_h \rightarrow U([1, N])$ //

2) Si P_c vid x n'est pas dans P_a P_c L, dans P_a commande P_c rajoute

3) `import numpy.random as rd`

`def Simul_T(N, i):`

`L = []`

`h = 0`

`while len(L) < i:`

`x = rd.randint(1, N+1)`

`ajout(L, x)`

`h = h + 1`

`return(h)`

4)

```

def moyenne_T():
    h = 0
    for i in range(100):
        h = h + Simul_T(3, 2)
    return (h/100)

```

Le résultat obtenu est une valeur approchée de $E(T_2)$

Partie B

5) $T_2(\omega) = [2, +\infty[= \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

6) a) Soit $h \geq 2$

$$[T_2 = h] \cap [X_1 = 1] = \bigcap_{j=2}^{h-1} [X_j = 1] \cap [X_h \neq 1]$$

b) Les tirages étant indépendants :

$$P([T_2 = h] \cap [X_1 = 1]) = \prod_{j=2}^{h-1} P(X_j = 1) \times P(X_h \neq 1)$$

$$P([T_2 = h] \cap [X_1 = 1]) = \frac{2}{3^h}$$

c) $(X=h)_{h \in \{1,2,3\}}$ forme un système complet d'événements équiprobables

$$\text{Donc } \underbrace{P(X=1)}_{(T_2=h)} + \underbrace{P(X=2)}_{(T_2=h)} + \underbrace{P(X=3)}_{(T_2=h)} = 1$$

$$\text{d'où } 3 \underbrace{P(X=1)}_{(T_2=h)} = 1$$

$$\text{d'où } \underbrace{P(X=1)}_{(T_2=h)} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Ainsi, } P([T_2=h] \cap [X_1=1]) = \frac{2}{3^h}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{P(T_2=h)}_{(T_2=h)} P(X_1=1) = \frac{2}{3^h}$$

$$\Leftrightarrow \underline{P(T_2=h) = \frac{2}{3^{h-1}}}$$

7)

$$\begin{aligned} \text{Soit } N \in \mathbb{N}^* \text{ tel q. } N-1 \\ \sum_{h=2}^N h P(T_2=h) &= 2 \sum_{h=2}^N \frac{h}{3^{h-1}} = 2 \sum_{h=2}^{N-1} h \times \frac{1}{3^h} + 2 \sum_{h=2}^{N-1} \frac{1}{3^h} \\ &= \frac{2}{3} \sum_{h=2}^{N-1} h \left(\frac{1}{3}\right)^{h-1} + \frac{2}{3} \sum_{h=0}^{N-2} \frac{1}{3^h} \end{aligned}$$

On reconnaît une somme géométrique d'ordre 1 et une somme géométrique doubles
deux convergentes car $|\frac{1}{3}| < 1$

$$\text{Donc } T_2 \text{ admet une espérance et } E(T_2) = \frac{2}{3} \frac{1}{(\frac{1}{3})^2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{2}$$

$$8) Z_2(\omega) = \mathbb{N}^*$$

$$\text{Soit } h \in \mathbb{N}^*, P(Z_2 = h) = P(T_2 = h+1)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{3^h} \\ &= \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{h-1} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } Z_2 \rightsquigarrow g\left(\frac{1}{3}\right) \text{ d'où } E(Z_2) = 3$$

$$\text{Par linéarité de l'espérance, } E(Z_2) = 3$$

$$\Leftrightarrow E(T_2) - 1 = 3$$

$$\Leftrightarrow \underline{E(T_2) = 4} \quad \underline{\text{incertitude}}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 817224

Emplacement QR Code	Code épreuve : 296	Nombre de pages : 24	Session : 2024
	Épreuve de : Mathématiques Appliquées EN Lyon		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Partie C

g) a) $Z_i(n) = N$

On veut tirer parmi les N numéros, un qui diffère des $i-1$ différents tirés
des T_{i-1} tirages. Il en existe donc $\frac{N-(i-1)}{N} = \frac{N-i+1}{N}$

Les tirages étant indépendants et équiprobables, on a bien :

$$Z_i \rightarrow g\left(\frac{N-i+1}{N}\right) //$$

b) D'après le cours :

$$E(Z_i) = \frac{N}{N-i+1} // \quad \text{et} \quad V(Z_i) = \frac{1 - \frac{N-i+1}{N}}{\left(\frac{N-i+1}{N}\right)^2}$$
$$= \frac{i-1}{N} \times \frac{N^2}{(N-i+1)^2}$$

$$V(Z_i) = \frac{N(i-1)}{(N-i+1)^2} //$$

$$Z_1 = 1 \text{ donc } E(Z_1) = 1 \text{ et } V(Z_1) = 0$$

Ce qui est bien vérifié par les formules

10) Soit $i \in [1, N]$, $T_i = \sum_{h=1}^i Z_h$ //

$\forall i \in [1, N]$, on pose l'hypothèse de récurrence $H(i)$: " $T_i = \sum_{h=1}^i Z_h$ "

pour $i=1$, T_1 est certaine et $T_1 = Z_1$

et $\sum_{h=1}^1 Z_h = Z_1 = 1$ donc $H(1)$ est vérifiée

Soit $i \in [1, N]$ tel que $H(i)$ vraie

$$\begin{aligned} T_{i+1} &= T_i + Z_{i+1} \\ &= \sum_{h=1}^{i+1} Z_h \end{aligned}$$

Donc d'après le principe de récurrence, $\forall i \in [1, N]$, $T_i = \sum_{h=1}^i Z_h$

11) a) Z_2 et Z_3 sont indépendantes donc :

$$\begin{aligned} P(Z_2=p \cap Z_3=h) &= P(Z_2=p) P(Z_3=h) \\ &= \left(1 - \frac{N-1}{N}\right)^{p-1} \times \left(1 - \frac{N-2}{N}\right) \left(\frac{N-2}{N}\right)^{h-1} \quad \text{d'après 9) a)} \end{aligned}$$

$$P(Z_2=p \cap Z_3=h) = \frac{1}{N^2} \left(\frac{N-1}{N}\right)^{p-1} \times \left(\frac{N-2}{N}\right)^{h-1} //$$

b) Soit $n, 2$ et d'après le système complet décomposé en $(Z_2 = h)_{h \in \mathbb{N}^+}$

$$\begin{aligned}
 P(Z_2 + Z_3 = n) &= \sum_{p=2}^{+\infty} P(Z_2 = p \cap Z_3 = p - n) \\
 &= \sum_{p=2}^{n-1} P(Z_2 = p \cap Z_3 = p - n) \\
 &= \sum_{p=2}^{n-1} \frac{2}{N^2} \left(\frac{N-1}{N} \right)^{p-2} \left(\frac{N-2}{N} \right)^{p-n-1} \\
 &= \frac{2}{N^2} \frac{N}{(N-1)} \times \frac{N}{(N-2)} \times \left(\frac{N-2}{N} \right)^{-n} \sum_{p=2}^{n-1}
 \end{aligned}$$

n'aboutit pas

c) $T_3 = Z_1 + Z_2 + Z_3$ donc $T_3(\mathbb{N}) = \mathbb{N}_3, + \infty \mathbb{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}_3, + \infty \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 P(T_3 = n) &= P(Z_2 + Z_3 = n - 1) \\
 &= \frac{(N-1)(N-2)}{2} \left(\left(\frac{2}{N} \right)^{n-1} - \frac{2}{N^{n-1}} \right)
 \end{aligned}$$

12) Par linéarité de l'espérance, $E(T_i) = \sum_{h=1}^i E(Z_h)$

$$\text{Donc } E(T_i) = \sum_{h=1}^i \frac{N}{N-h+1} \quad \text{car } Z_h \sim g\left(\frac{N-h+1}{N}\right)$$

$$= N \sum_{h=1}^i \frac{1}{N-h+1}$$

n'aboutir pas