

EXERCICE 1

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1.

1. a) Les colonnes de J_n sont toutes égales et non nulles, donc $\text{rg}(J_n) = 1 < n$, ce qui prouve que 0 est valeur propre de J_n et que $\dim E_0(J_n) = n - 1$ d'après le théorème du rang.

b) Soit le vecteur V_n , élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes sont égales à 1.

Alors $J_n \times V_n$ est le vecteur colonne dont tous les éléments sont égaux à n , soit : $J_n \times V_n = n.V_n$, ce qui prouve, puisque V_n est non nul, que n est valeur propre de J_n , V_n étant un vecteur propre associé.

c) On sait donc jusqu'à présent, que :

- 0 est valeur propre de J_n avec $\dim E_0(J_n) = n - 1$.
- n est valeur propre de J_n avec $\dim E_n(J_n) \geq 1$.

Or d'après le théorème spectral : $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(J_n)} \dim E_\lambda(J_n) \leq n$, donc :

- J_n n'a pas d'autre valeur propre que 0 et n : $\text{Sp}(J_n) = \{0; n\}$.
- $\dim E_n(J_n) = 1$ et J_n est semblable à une matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui en bas à droite qui vaut n .

Dans toute la suite, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)^2.$$

2. La fonction f_n est polynômiale en ses variables $x_1, \dots, x_n$: elle est donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.

3. a) Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$:

$$\partial_i f_n(x) = \frac{1}{n} \times 2x_i - \frac{1}{n} \times 2 \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \frac{2}{n} x_i - \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n x_k.$$

b) Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ un point critique de f_n : ce point est solution du système

$$\begin{cases} \partial_1 f_n(x) = 0 \\ \partial_2 f_n(x) = 0 \\ \vdots \\ \partial_n f_n(x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \\ x_2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \end{cases} \implies x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

Réciproquement, pour tout réel a :

$$\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \quad \partial_i f_n(a, a, \dots, a) = \frac{2a}{n} - \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n a = \frac{2a}{n} - \frac{2}{n^2} \times na = 0,$$

donc $(a, a, \dots, a)$ est un point critique de f_n .

Par double implication, les points critiques de f_n sont donc exactement les points de la forme $(a, a, \dots, a) \in \mathbb{R}^n$.

4. a) Soit $(i, j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$; pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\partial_{i,j}^2 f_n(x) = -\frac{2}{n^2} \text{ si } i \neq j, \text{ et } \partial_{i,i}^2 f_n(x) = \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}.$$

b) Il est clair, au vu des calculs précédents, que la Hessienne de f_n en tout point $x \in \mathbb{R}^n$, et notamment en chaque point critique $(a, a, \dots, a)$, est :

$$\nabla^2 f_n(a, a, \dots, a) = \frac{2}{n} J_n - \frac{2}{n^2} I_n = \frac{2}{n^2} (nI_n - J_n).$$

c) Les commandes Python suivantes, issues de la bibliothèque `numpy`, permettent de construire la matrice Hessienne $\nabla^2 f_n(a, a, \dots, a)$:

```
n = int(input('entrez la valeur de n : '))
I = np.eye(n,n)
J = np.ones([n,n])
Hessienne = 2/n*I - 2/n**2*J
print(Hessienne)
```

d) Il y a plusieurs façons possibles de rédiger cette question, en voilà une possible.

D'après ce qui précède, la matrice J_n est diagonalisable : il existe $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $J_n = Q \text{diag}(0, \dots, 0, n) Q^{-1}$ et puisque $Q I_n Q^{-1} = I_n$, on peut alors écrire :

$$nI_n - J_n = Q(nI_n - \text{diag}(0, \dots, 0, n))Q^{-1} = Q \text{diag}(n, n, \dots, n, 0)Q^{-1} \implies \frac{2}{n^2}(nI_n - J_n) = Q \text{diag}\left(\frac{2}{n}, \dots, \frac{2}{n}, 0\right)Q^{-1}.$$

Ainsi, $\text{Sp}(\nabla^2 f_n(a, \dots, a)) = \{0; \frac{2}{n}\}$. Puisque 0 est valeur propre de la Hessienne, on ne peut pas conclure par la méthode utilisant cette matrice, quant à savoir si f_n possède un extrémum local en ses points critiques.

5. a) Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs $(1, \dots, 1)$ et x donne :

$$\begin{aligned} \langle (1, \dots, 1), x \rangle &\leq \|(1, \dots, 1)\| \cdot \|x\| \iff \langle (1, \dots, 1), x \rangle^2 \leq \|(1, \dots, 1)\|^2 \cdot \|x\|^2 \\ &\iff \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq \underbrace{\sum_{k=1}^n 1^2}_{=n} \times \sum_{k=1}^n x_k^2, \quad \text{CQFD.} \end{aligned}$$

b) En multipliant par $\frac{1}{n^2} > 0$ les deux membres de l'inégalité précédente, on obtient :

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 \iff \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \geq 0$$

La fonction f_n est donc minorée par 0 sur $\mathbb{R}^n$. Or pour tout réel a :

$$f_n(a, \dots, a) = \frac{1}{n} \times na^2 - \left(\frac{1}{n} \times na \right)^2 = a^2 - a^2 = 0,$$

donc : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall a \in \mathbb{R}, f_n(x) \geq f_n(a, \dots, a)$, ce qui prouve que la fonction f_n admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$, valant 0 et atteint en chacun de ses points critiques.

6. Étude du cas $n = 2$.

a) La fonction $f_2 : x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right)^2$ est définie en Python par :

```
def f_2(x, y):  
    z = (x**2 + y**2) / 2 - ((x + y) / 2)**2  
    return z
```

b) On sait tracer en Python la nappe de la fonction f_2 : celle-ci a pour points critiques tous les points de la forme (a, a) pour $a \in \mathbb{R}$, en lesquels elle atteint son minimum global 0, ce qui correspond à la nappe 1.

EXERCICE 2

1. Question préliminaire. L'énoncé rappelait que la fonction arctangente, notée Arctan , est la bijection réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

a) D'après le cours : $\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

b) Considérons la fonction $g : x \mapsto \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.

D'après ce qui précède, la fonction g est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ comme composée et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, et :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad g'(x) = \text{Arctan}'(x) - \frac{1}{x^2} \cdot \text{Arctan}'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

La fonction g , de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée nulle sur $]0; +\infty[$, est par conséquent constante sur cet intervalle.

Puisque $g(1) = 2\text{Arctan}(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, alors on a bien :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

- c) La fonction Arctan étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, elle admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 donné par :

$$\text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \text{Arctan}(0) + x \cdot \text{Arctan}'(0) + o(x) = 0 + x \cdot 1 + o(x) = x + o(x),$$

ce qui donne bien l'équivalent :

$$\text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

2. On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2}{\pi(e^x + e^{-x})}.$$

- a) La fonction $f : x \mapsto \frac{2}{\pi(e^x + e^{-x})}$ est clairement définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonction qui le sont, le dénominateur restant strictement positif sur tout $\mathbb{R}$.

Cette même fonction est aussi clairement *paire* sur $\mathbb{R}$, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge si

et seulement si $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge. Cette dernière intégrale est impropre en $+\infty$, et :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi e^x} = \frac{2}{\pi} e^{-x}.$$

Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ converge et vaut $\Gamma(1) = 0! = 1$, donc par comparaison d'intégrales de fonctions continues positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge, et par conséquent $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge aussi.

- b) La fonction f est clairement continue et positive sur $\mathbb{R}$, il reste donc à calculer la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x)dx$.

La fonction $\varphi : x \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $[0; +\infty[$ dans $[1; +\infty[$, le changement de variable $t = e^x$ est donc licite.

En écrivant $f(x)dx = \frac{2e^x}{\pi(e^{2x} + 1)}dx$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{2}{\pi(t^2 + 1)}dt = \frac{2}{\pi} \times \lim_{A \rightarrow +\infty} [\text{Arctan}(t)]_0^A = \frac{2}{\pi} \times \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 1,$$

ce qui achève de démontrer que f est une densité de probabilité.

Dans la suite, on s'intéresse à une variable aléatoire X , définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, admettant f pour densité.

3. La fonction de répartition F de X est définie par $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ pour tout réel x .

La fonction $\varphi : t \mapsto e^t$ est toujours de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $] -\infty; x]$ dans $]0; e^x]$, de sorte que pour tout réel x , le changement de variable $u = e^t$ donne, comme en 2.b) :

$$F(x) = \int_0^{e^x} \frac{2}{\pi(u^2 + 1)}du = \frac{2}{\pi} [\text{Arctan}(u)]_0^{e^x} = \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(e^x).$$

4. Simulation.

L'énoncé pose $U = F(X)$, et admet que U est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

- a) La fonction F est, d'après son expression obtenue à la question 3, à un facteur strictement positif près $\frac{2}{\pi}$, la composée de deux bijections strictement croissantes : $\exp$ de $\mathbb{R}$ dans $]0; +\infty[$ et Arctan qui réalise une bijection de $]0; +\infty[$ dans l'intervalle $]\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{Arctan}(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x)[=]0; \frac{\pi}{2}[$.

Le facteur strictement positif $\frac{2}{\pi}$ assure bien que F est une bijection continue, strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]0; 1[$.

- b) Calculons la fonction de répartition de U : puisque F est à valeurs dans $]0; 1[$, alors $U(\Omega) \subset]0; 1[$ et on peut déjà affirmer en conséquence que :

$$\forall x \in]-\infty; 0], \quad F_U(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [1; +\infty[, \quad F_U(x) = 1.$$

Pour tout $x \in]0; 1[$:

$$F_U(x) = \mathbf{P}(U \leq x) = \mathbf{P}(F(X) \leq x) \stackrel{(*)}{=} \mathbf{P}(X \leq F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x$$

(*) : car F^{-1} est une bijection continue, strictement croissante sur $]0; 1[$.

On reconnaît en la fonction $F_U : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ la fonction de répartition de la loi uniforme à densité sur $]0; 1[$: c'est la loi suivie par la variable aléatoire U .

- c) Soit $x \in]0; 1[$; par bijectivité de $\exp$ et Arctan , on peut écrire, pour $y \in \mathbb{R}$:

$$y = F(x) \iff \frac{\pi}{2}y = \text{Arctan}(e^x) \iff e^x = \tan\left(\frac{\pi}{2}y\right) \iff x = \ln\left(\underbrace{\tan\left(\frac{\pi}{2}y\right)}_{=F^{-1}(y)}\right).$$

D'après ce qui précède, il suffit donc de simuler une variable aléatoire U de loi uniforme à densité sur $]0; 1[$: dans ce cas, la variable aléatoire $F^{-1}(U)$ suit la même loi que X .

Le script ci-dessous renvoie alors une simulation de la variable aléatoire X .

```
import numpy.random as rd
import numpy as np

U = rd.random()
X = np.log(np.tan(np.pi/2*U))
print(X)
```

5. a) La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ est absolument convergente.

Comme la fonction f est paire, alors la fonction $x \mapsto xf(x)$ est impaire sur $\mathbb{R}$, où elle est également continue; il suffit donc d'étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$, intégrale d'une fonction continue et positive sur $[0; +\infty[$.

Grâce au travail déjà fait à la question 2.a), on peut écrire :

$$xf(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \times xe^{-x}.$$

Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ converge (c'est $\Gamma(2)$, elle vaut $1! = 1$) : le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues, positives assure alors que $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ est (absolument) convergente.

L'imparité de la fonction $x \mapsto xf(x)$ assure finalement que $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ est absolument convergente, donc que X admet une espérance qui vaut :

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 0 \quad (\text{par imparité}).$$

- b) La variable aléatoire X^2 admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ converge.

La fonction $x \mapsto x^2 f(x)$ est continue, positive et paire sur $\mathbb{R}$, donc il suffit d'étudier la convergence simple de $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx$.

Or $x^2 f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \times x^2 e^{-x}$, et $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}dx$ converge (valant $\Gamma(3) = 2! = 2$) : le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues, positives assure que $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx$ converge, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ aussi, et donc que X^2 admet une espérance.

6. Dans cette question, l'énoncé se proposait de déterminer la variance de X .

On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t + e^{-t}} dt$.

- a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} nt^2 e^{-nt} dt$ est, d'après le théorème de transfert, égale au moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Y suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(n)$ de paramètre n .

D'après le cours sur cette loi, cette intégrale est par conséquent convergente, et vaut selon la formule de Koenig-Huygens :

$$\int_0^{+\infty} nt^2 e^{-nt} dt = \mathbf{E}(Y^2) = \mathbf{V}(Y) + \mathbf{E}(Y)^2 = \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{2}{n^2}.$$

En divisant chaque membre de ces égalités par n , on obtient bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt = \frac{2}{n^3}.$$

b) Soit $p \in \mathbb{N}$; la convergence des intégrales impropres étudiées à la question précédente, assure qu'on peut utiliser la linéarité de l'intégrale pour écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p (-1)^k \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t} dt &= \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} \sum_{k=0}^p (-e^{-2t})^k dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t} \times \frac{1 - (-e^{-2t})^{p+1}}{1 + e^{-2t}} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^2}{e^t(1 + e^{-2t})} + (-1)^{p+2} \frac{t^2 e^{-t} \times e^{-(2p+2)t}}{1 + e^{-2t}} \right) dt \\ &= \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t + e^{-t}} dt}_{=I} + (-1)^p \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} dt. \end{aligned}$$

c) Pour tout réel $t \geq 0$: $1 + e^{-2t} > 1$ et $t^2 e^{-(2p+3)t} \geq 0$, donc $0 \leq \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} \leq t^2 e^{-(2p+3)t}$.

Les fonctions comparées sont continues sur $[0; +\infty[$, et les intégrales convergent, donc par positivité et croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} dt \leq \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2p+3)t} dt = \frac{2}{(2p+3)^3}$$

Il reste à dire que puisque $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2}{(2p+3)^3} = 0$, le théorème d'encadrement permet de conclure que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} dt = 0.$$

d) En remarquant que $I = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt = \frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \frac{\pi}{4} \mathbf{E}(X^2) = \frac{\pi}{4} \mathbf{V}(X)$ par parité de $t \mapsto t^2 f(t)$ et vu que $\mathbf{E}(X) = 0$, alors :

$$\mathbf{V}(X) = \frac{4}{\pi} I = \frac{4}{\pi} \left((-1)^p \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} dt - \sum_{k=0}^p (-1)^k \times \frac{2}{(2k+1)^3} \right).$$

Puisque $(-1)^p$ est borné entre -1 et 1 , le résultat de 6.c) assure que $\lim_{p \rightarrow +\infty} (-1)^p \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} dt = 0$.

L'énoncé admettant que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$, on peut passer à la limite lorsque p tend vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, pour obtenir :

$$\mathbf{V}(X) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{4}{\pi} \times \frac{\pi^3}{32} = \frac{\pi^2}{8}.$$

7. On pose $Y = e^X$ et on admet que Y est une variable aléatoire, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

a) La variable aléatoire Y est par stricte positivité de l'exponentielle, à valeurs dans $]0; +\infty[$, donc on peut déjà dire que : $\forall x \in]-\infty; 0]$, $G(x) = \mathbf{P}(Y \leq x) = 0$.

Pour tout réel $x > 0$: $\ln$ étant une bijection continue, strictement croissante de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$,

$$G(x) = \mathbf{P}(e^X \leq x) = \mathbf{P}(X \leq \ln(x)) = \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(e^{\ln(x)}) = \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(x).$$

La fonction de répartition G de Y est de classe $\mathcal{C}^1$ donc continue sur $] -\infty; 0[$ comme fonction constante sur cet intervalle, et sur $]0; +\infty[$ car Arctan l'est.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^-} G(x) = 0 = G(0)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(x) = \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(0) = 0$, donc G est continue en 0, donc sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.

La variable aléatoire Y est donc à densité.

b) On considère une suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, toutes définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, et suivant la même loi que Y .

On pose $M_n = \max(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

La fonction de répartition G_n de M_n est alors définie par :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad G_n(x) &= \mathbf{P}(M_n \leq x) = \mathbf{P}(\max(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \leq x) \\ &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [Y_k \leq x]\right) \text{ par définition du maximum} \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbf{P}(Y_k \leq x) \quad \text{par indépendance des } (Y_i)_{1 \leq i \leq n} \\ &= (G(x))^n \quad \text{car les } Y_i \text{ suivent toutes la loi de } Y \\ &= \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi} \text{Arctan}(x)\right)^n & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

c) D'après ce qui précède, puisque $\mathbf{P}(M_n = 0) \leq \mathbf{P}(M_n \leq 0) = 0$, chacune des variables aléatoires $\left(\frac{n}{M_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est presque-sûrement bien définie et à valeurs strictement positives, de sorte que $\mathbf{P}\left(\frac{n}{M_n} \leq x\right) = 0$ pour tout $x \in]-\infty; 0]$.

Soit $x > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\frac{n}{M_n} \leq x\right) &= \mathbf{P}\left(\frac{n}{x} \leq M_n\right) \quad \text{car } x > 0 \text{ et } M_n > 0 \text{ p.s.} \\ &= 1 - G_n\left(\frac{n}{x}\right) \quad \text{car } M_n \text{ est à densité (admis par l'énoncé)} \\ &= 1 - \left(\frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{n}{x}\right)\right)^n \quad \text{car } x > 0 \text{ donc } \frac{n}{x} > 0 \\ &= 1 - \left(1 - \frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n \quad \text{d'après 1.b)} \\ &= 1 - e^{n \ln\left(1 - \frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right)} \end{aligned}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(0)$, donc d'après l'équivalent classique $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$:

$$\ln\left(1 - \frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2x}{\pi n}$$

d'après l'équivalent obtenu en 1.c). Par compatibilité de l'équivalence avec le produit, on en déduit :

$$n \ln\left(1 - \frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2x}{\pi},$$

donc pour tout réel $x > 0$ (fixé) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - e^{n \ln\left(1 - \frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right)} = 1 - e^{-\frac{2}{\pi}x}.$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\frac{n}{M_n} \leq x\right) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{2}{\pi}x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} = H(x).$$

On reconnaît en la fonction H , la fonction de répartition de la loi exponentielle $\mathcal{E}\left(\frac{2}{\pi}\right)$, qui est continue sur $\mathbb{R}$ puisque c'est une loi à densité.

On peut donc affirmer que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{n}{M_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit cette loi exponentielle.

EXERCICE 3

Dans cet exercice, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien de dimension $\dim E \geq 2$ et p est un entier naturel non nul tel que $p < \dim E$.

On considère p réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tous différents de 0, une famille orthonormale $(u_1, \dots, u_p)$ de p vecteurs de E , et enfin on pose $U = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

On se propose d'étudier l'application f qui à tout vecteur x de E , associe :

$$f(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i.$$

Partie 1 : étude de f

1. La bilinéarité du produit scalaire permet de vérifier facilement que f est une application linéaire définie sur E :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad f(\alpha \cdot x + y) &= \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, \alpha \cdot x + y \rangle u_i = \sum_{i=1}^p \lambda_i (\alpha \langle u_i, x \rangle + \langle u_i, y \rangle) u_i \\ &= \alpha \cdot \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i + \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, y \rangle u_i = \alpha \cdot f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Pour tout $x \in E$: les λ_i et $\langle u_i, x \rangle$ sont des réels et les u_i sont des vecteurs de E ,

donc $f(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i$ est un vecteur de E : f est un endomorphisme de E .

Soit ensuite $(x, y) \in E^2$ quelconque :

$$\begin{aligned} \langle f(x), y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i, y \right\rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle \cdot \langle u_i, y \rangle \quad \text{par bilinéarité du produit scalaire} \\ \langle x, f(y) \rangle &= \left\langle x, \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, y \rangle u_i \right\rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle x, u_i \rangle \cdot \langle u_i, y \rangle \end{aligned}$$

Donc par symétrie du produit scalaire, on a bien : $\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$
donc f est bien un endomorphisme symétrique de E .

2. Lorsque les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont tous égaux à 1 :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \sum_{i=1}^p \langle u_i, x \rangle u_i$$

qui correspond, puisque $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille orthonormée, à la formule définissant la projection orthogonale sur $U = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

On revient au cas général pour toute la suite.

3. a) Soit $x \in E$:

$$x \in \text{Ker}(f) \iff \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i = 0_E \xLeftrightarrow{(1)} \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \lambda_i \langle u_i, x \rangle = 0 \xLeftrightarrow{(2)} \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \langle u_i, x \rangle = 0$$

(1) : la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est orthonormale donc libre

(2) : les réels $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont tous différents de 0.

On en déduit donc que : $\text{Ker}(f) = U^\perp$, puisqu'un vecteur appartient au noyau de f si et seulement s'il est orthogonal à chacun des vecteurs de la base $(u_1, \dots, u_p)$ de U .

Puisqu'on est en dimension finie, on a alors :

$$\dim \text{Ker}(f) = \dim U^\perp = \dim E - \dim U = \dim E - p$$

puisque $(u_1, \dots, u_p)$, orthonormale, est une base de l'espace vectoriel U qu'elle engendre.

b) Le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme f de E , espace de dimension finie, donne alors :

$$\text{rg}(f) = \dim E - \dim \text{Ker}(f) = p.$$

Or il est clair que : $\forall x \in E, f(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = U$ donc $\text{Im}(f) \subset U$.

Et comme $\dim \text{Im}(f) = \text{rg}(f) = p = \dim U$, alors :

$$\text{Im}(f) = U.$$

4. Toujours du fait que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est orthonormale : pour tout entier $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$,

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, u_j \rangle u_i = \lambda_j u_j \quad \text{puisque} \quad \langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Or u_j est non nul (puisque $\|u_j\| = 1$), donc pour tout $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$, u_j est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ_j .

subsection*Partie 2 : convergence d'une suite de vecteurs de E

5. Supposons qu'une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de vecteurs de E converge, au sens de la définition donnée par l'énoncé, vers deux vecteurs y et y^* de E , c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_n - y\| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_n - y^*\| = 0.$$

On a alors : $0 \leq \|y - y^*\| = \|(y - y_n) + (y_n - y^*)\| \leq \|y_n - y\| + \|y_n - y^*\|$ d'après l'inégalité triangulaire.

Mais alors, le passage à la limite dans cette double inégalité lorsque n tend vers $+\infty$ donne :

$$0 \leq \|y - y^*\| \leq 0 \iff \|y - y^*\| = 0 \iff y - y^* = 0_E \iff y = y^*,$$

ce qui prouve l'unicité de la limite de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, si elle existe.

On pose $K = \sqrt{\sum_{i=1}^p \lambda_i^2}$ et on suppose que K est strictement inférieur à 1.

6. Soit $x \in E$. Étant donné que les vecteurs $(u_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont deux à deux orthogonaux, d'après le théorème de Pythagore :

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \langle u_i, x \rangle^2 \|u_i\|^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \langle u_i, x \rangle^2.$$

Or pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\lambda_i^2 \leq \sum_{j=1}^p \lambda_j^2 = K^2$, donc : $\|f(x)\|^2 \leq K^2 \sum_{i=1}^p \langle u_i, x \rangle^2$.

Or la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est orthonormale ; on peut donc la compléter en une base $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n)$ de E , de sorte, d'après les formules en base orthonormale, que :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle u_i, x \rangle^2 = \sum_{i=1}^p \langle u_i, x \rangle^2 + \underbrace{\sum_{i=p+1}^n \langle u_i, x \rangle^2}_{\geq 0} \geq \sum_{i=1}^p \langle u_i, x \rangle^2,$$

ce qui prouve bien que : $\forall x \in E, \|f(x)\|^2 \leq K^2 \|x\|^2 \implies \forall x \in E, \|f(x)\| \leq K \|x\|$ par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$, et par positivité de la norme et du réel K .

7. On considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de E définie par la donnée du vecteur x_0 et par la relation $x_{n+1} = f(x_n)$, valable pour tout entier naturel n .

a) On montre par une récurrence simple que la propriété $\mathcal{P}(n) : \|x_n\| \leq K^n \|x_0\|$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

[I.] Pour $n = 0$: $K^0 \|x_0\| = \|x_0\|$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

[H.] Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie, soit : $\|x_{n+1}\| \leq K^{n+1} \|x_0\|$.

On sait d'après 6. que : $\|x_{n+1}\| = \|f(x_n)\| \leq K \|x_n\|$,

or (H.R.) : $\|x_n\| \leq K^n \|x_0\| \xrightarrow{K > 0} K \|x_n\| \leq K^{n+1} \|x_0\| \Rightarrow \|x_{n+1}\| \leq K^{n+1} \|x_0\|$ par transitivité de l'inégalité, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

[C.] La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

b) Puisque $0 < K < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} K^n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} K^n \|x_0\|$, donc d'après le résultat précédent, par encadrement (une norme est toujours positive) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_n\| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_n - 0_E\| = 0,$$

ce qui prouve d'après la définition donnée au début de cette partie 2, que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de E , converge vers le vecteur nul de E .

c) Toujours du fait que $0 < K < 1$: la série géométrique $\sum_{n \geq 0} K^n \|x_0\|$ est convergente, donc

d'après 7.a) et le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 0} \|x_n\|$ converge.

PROBLÈME

Partie 1

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$. On a donc $u_0 = 1$.

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0; 1]$, $1+t^2 \geq 1$ donc :

$$(1+t^2)^{n+1} \geq (1+t^2)^n \geq 1 \implies 0 < \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \leq \frac{1}{(1+t^2)^n}$$

par stricte décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

Les fonctions comparées sont continues sur $[0; 1]$ et $0 < 1$, donc par croissance et positivité de l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_{n+1} \leq u_n,$$

ce qui prouve bien que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive.

- b) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 : d'après le théorème de limite monotone, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc convergente (de limite $\ell \geq 0$).
2. a) Définissons sur $[0; 1]$, la fonction $g : x \mapsto e^{x/2} - 1 - x$. Cette fonction est dérivable sur $[0; 1]$ comme somme de fonctions qui le sont, et $\forall x \in [0; 1]$, $g'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2} - 1 \leq \frac{e^{1/2}}{2} - 1$ par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$.

Or $e^{1/2} = \sqrt{e}$, et on sait que $2 < e < 3 \implies 1 < \sqrt{e} < 2 \implies \frac{e^{1/2}}{2} - 1 < 0$, ce qui prouve que $g'(x) < 0$ pour tout $x \in [0; 1]$, et donc que g est strictement décroissante sur $[0; 1]$.

Ainsi : $\forall x \in [0; 1]$, $g(x) \leq g(0) = e^0 - 1 = 0 \implies \forall x \in [0; 1]$, $e^{x/2} \leq 1 + x$.

b) Pour tout $t \in [0; 1]$, $t^2 \in [0; 1]$ donc d'après ce qui précède,

$$0 < e^{t^2/2} \leq 1 + t^2 \implies 0 < (e^{t^2/2})^n \leq (1 + t^2)^n$$

par croissance de la fonction puissance n -ième sur $\mathbb{R}^+$. Par stricte décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0; 1], \quad 0 < \frac{1}{(1+t^2)^n} \leq e^{-nt^2/2}.$$

Les fonctions comparées sont continues sur $[0; 1]$ et $0 < 1$, donc par croissance de l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = u_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2/2} dt.$$

- c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; la fonction $t \mapsto \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-nt^2/2}$ correspond à une densité de la loi normale centrée d'écart-type $\frac{1}{\sqrt{n}}$, de sorte que :

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt = 1 \iff \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

d) La fonction $t \mapsto e^{-nt^2/2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^0 e^{-nt^2/2} dt}_{\geq 0} + \int_0^1 e^{-nt^2/2} dt + \underbrace{\int_1^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt}_{\geq 0} \geq \int_0^1 e^{-nt^2/2} dt,$$

donc par transitivité de l'inégalité : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} = 0$, le théorème d'encadrement assure que : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$.

Partie 2

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est bien définie et continue sur $[0; +\infty[$, donc

l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ est impropre en $+\infty$.

Pour tout réel $t \geq 1$: $0 < \frac{1}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{(t^2)^n} = \frac{1}{t^{2n}}$.

Or $n \geq 1$ donc $2n \geq 2 > 1$: l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}} dt$ est convergente, donc par comparaison d'intégrales de fonctions positives et continues, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ converge, et par conséquent

l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ converge aussi.

Pour toute la suite, on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt.$$

4. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme on l'a vu précédemment : $\forall t \geq 1, 0 < \frac{1}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{t^{2n}}$.

Les fonctions comparées sont continues sur $[1; +\infty[$ et les intégrales convergent, donc par croissance et positivité de l'intégrale :

$$0 \leq I_n \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}} dt = \frac{1}{2n-1}.$$

b) Il est alors évident que puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$, par encadrement : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0}$.

c) Il est clair, d'après la relation de Chasles, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n = u_n + I_n,$$

donc d'après les résultats de 2.d) et 4.b) : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0}$.

5. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $A > 0$. Dans l'intégrale $\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$, on réalise une intégration par parties en posant :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{(1+t^2)^n} = (1+t^2)^{-n} \longrightarrow u'(t) = -2nt(1+t^2)^{-n-1} = -\frac{2nt}{(1+t^2)^{n+1}} \\ v'(t) &= 1 \longrightarrow v(t) = t \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$, donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n} dt &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^A + 2n \int_0^A \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n \int_0^A \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^{n+1}} dt = \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n \int_0^A \left(\frac{1}{(1+t^2)^n} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \right) dt. \end{aligned}$$

Puisque $\frac{A}{(1+A^2)^n} \underset{A \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{A^{2n}} = \frac{1}{A^{2n-1}} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$ (vu que $2n-1 \geq 1$), et puisque les intégrales J_n et J_{n+1} convergent, alors on peut passer à la limite lorsque A tend vers $+\infty$ pour obtenir la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n = 2n(J_n - J_{n+1}).$$

b) Par définition :

$$J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} (\text{Arctan}(A) - \text{Arctan}(0)) = \frac{\pi}{2}.$$

c) D'après 5.a) : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{J_n}{n} = 2(J_n - J_{n+1})$, donc

$$\sum_{n=1}^N \frac{J_n}{n} = 2 \sum_{n=1}^N (J_n - J_{n+1}) = 2(J_1 - J_{N+1}) = \pi - 2J_{N+1}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$ (question 4.c)), alors la série de terme général $\frac{J_n}{n}$ est bien convergente, et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_n}{n} = \lim_{N \rightarrow +\infty} (\pi - 2J_{N+1}) = \pi.$$

d) La relation de la question 5.a) se réécrit : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2nJ_{n+1} = (2n-1)J_n \iff J_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)J_n$,
ou encore : $\forall n \geq 2, J_n = \left(1 - \frac{1}{2n-2}\right)J_{n-1}$.

On en déduit le script Python suivant qui permet de calculer la valeur de J_n :

```
def suiteJ(n):
    J = np.pi/2
    for k in range(2, n+1):
        J = (1 - 1/(2*k-2)) * J
    return J
```

6. On peut ici raisonner par récurrence sur n , pour montrer que $\mathcal{P}(n)$: " $J_{n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ ", est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

[I.] Pour $n = 0$: d'une part, $J_{0+1} = \frac{\pi}{2}$ et d'autre part, $\binom{0}{0} = 1 = 4^0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

[H.] Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, soit : $J_{n+2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}}$.

On sait d'après 5.c) que : $J_{n+2} = \left(1 - \frac{1}{2n+2}\right)J_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}J_{n+1}$, donc par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} J_{n+2} &= \frac{\pi}{2} \times \frac{\frac{2n+1}{2n+2} \binom{2n}{n}}{4^n} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\frac{(2n+1) \times (2n)!}{2(n+1) \times n! n!}}{4^n} \\ &= \frac{\pi}{2} \times \frac{\frac{(2n+2) \times (2n+1)!}{2(n+1) \times 2 \times (n+1)! n!}}{4^n} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \\ &= \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}}, \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

[C.] La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

Partie 3

On désigne par n un entier naturel non nul et on note X_n (resp. Y_n) le nombre de "piles" (resp. "faces") obtenus lors des $2n$ premiers lancers supposés indépendants d'une pièce équilibrée.

7. a) Chaque lancer de pièce peut être considéré comme une épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir pile" est de probabilité $\frac{1}{2}$. La variable aléatoire X_n compte le nombre de succès lors de la répétition de $2n$ épreuves identiques et indépendantes : cette variable suit donc la loi binomiale de paramètres $(2n, \frac{1}{2})$.

$$X_n(\Omega) = \llbracket 0; 2n \rrbracket, \forall k \in X_n(\Omega), \mathbf{P}(X_n = k) = \binom{2n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

- b) L'événement $[X_n = Y_n]$ est égal à l'événement $[X_n = n]$ puisqu'on veut autant de piles que de faces en $2n$ lancers, donc :

$$\mathbf{P}(X_n = Y_n) = \mathbf{P}(X_n = n) = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} = \frac{2}{\pi} J_{n+1}$$

d'après le résultat de la question 6.

D'après 4.c), on a donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_n = Y_n) = 0$.

- c) La pièce lancée est équilibrée, et il y a par symétrie autant de situations où au cours des $2n$ lancers, la pièce donne strictement plus de piles que de faces, que de situations où la pièce donne strictement plus de faces que de piles. Ceci suffit à justifier que : $\mathbf{P}(X_n < Y_n) = \mathbf{P}(X_n > Y_n)$.
- d) Les événements $([X_n < Y_n], [X_n = Y_n], [X_n > Y_n])$ forment un système complet d'événements, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_n < Y_n) + \mathbf{P}(X_n = Y_n) + \mathbf{P}(X_n > Y_n) &= 1 \iff 2\mathbf{P}(X_n < Y_n) = 1 - \mathbf{P}(X_n = Y_n) \\ &\iff \mathbf{P}(X_n < Y_n) = \frac{1}{2}(1 - \mathbf{P}(X_n = Y_n)). \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_n = Y_n) = 0$ (question 7.b)), alors on a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_n < Y_n) = \frac{1}{2}$.

8. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire Z_k qui vaut 1 si le k -ième lancer donne "pile", et 0 sinon.

- a) Il est clair que $\sum_{k=1}^{2n} Z_k$ est une variable aléatoire qui compte le nombre de "piles" obtenus au cours des $2n$ lancers de la pièce : chaque "pile" obtenu à un lancer k donne la valeur 1 à la variable Z_k correspondante, qui contribue ainsi d'une unité à la somme, sinon Z_k prend la valeur 0 et la somme ne change pas de cette valeur en intégrant ce terme. Ainsi : $\sum_{k=1}^{2n} Z_k = X_{2n}$.

- b) Comme en 7.c), on justifie que $\mathbf{P}(X_n \leq Y_n) = \mathbf{P}(X_n \leq n)$, qui vaut aussi :

$$\mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{2n} Z_k \leq n\right) = \mathbf{P}\left(\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} Z_k \leq \frac{1}{2}\right).$$

Or les variables $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes et identiquement distribuées selon la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$: elles admettent une espérance valant $\frac{1}{2}$ et une variance non nulle $\frac{1}{4} > 0$.

Le théorème central limite s'applique donc, qui assure que la variable aléatoire $\frac{\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} Z_k - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée, réduite, de sorte que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} Z_k \leq \frac{1}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} Z_k - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \leq 0\right) = \Phi(0),$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée, réduite.

Comme $\Phi(0) = \frac{1}{2}$, on a bien : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_n \leq Y_n) = \frac{1}{2}$.

- c) Dans l'égalité d'événements $[X_n \leq Y_n] = [X_n < Y_n] \cup [X_n = Y_n]$, l'union est disjointe donc $\mathbf{P}(X_n < Y_n) = \mathbf{P}(X_n \leq Y_n) - \mathbf{P}(X_n = Y_n)$.

Les résultats des questions 7.b) et 8.b) redonnent bien :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_n < Y_n) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

★★★ FIN DU SUJET ★★★