



A6-00075
746584
Maths T

Code épreuve : 285

Nombre de pages : 23

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques T Esch BS

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice n°1

1. a) $h(x)$ est de la forme e^u avec $u(x) = -\sqrt{x}$ et
 $u'(x) = -\frac{1}{2}x^{-1/2}$
 $= -\frac{1}{2\sqrt{x}}$

donc : $h'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}} \times e^{-\sqrt{x}} = \boxed{\frac{-e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}}$

b) $\forall y > 0$: $\int_0^y g(t) dt = \int_0^y \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} dt = - \int_0^y \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} dt$

$= \left[e^{-\sqrt{t}} \right]_0^y$ d'après q. a

$\Rightarrow e^{-\sqrt{y}} - e^{-\sqrt{0}} = \boxed{e^{-\sqrt{y}} - 1}$

2. Si $t \leq 0$: $f(t) = e^t \geq 0$

Si $t < 0$: $f(t) = 0 \geq 0$

$f(t) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

• f est continue sauf éventuellement en 0
(en fait elle est pas continue en 0)

~~$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{+\infty} e^t dt = \int_0^{+\infty} e^t dt.$$~~

~~On calcule: $\int_0^A e^t dt = [e^t]_0^A = e^A - 1.$~~

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 e^t dt + \int_0^{+\infty} 0 dt = \int_{-\infty}^0 e^t dt =$$

On calcule: $\int_A^0 e^t dt = [e^t]_A^0 = 1 - e^A$

$\lim_{A \rightarrow -\infty} e^A = 0$, l'intégrale converge

Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$.

f est bien une densité de probabilité.

3. si $x > 0$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^0 e^t dt + \int_0^x 0 dt = \int_{-\infty}^0 e^t dt = \boxed{1}$

d'après q. précédente.

b) si $x < 0$: $F_X(x) = \int_x^0 e^t dt = [e^t]_x^0 = \boxed{1 - e^x}$

4. a) $G(x) = P(X \leq x)$ $P(-X \leq x)$
 $\Rightarrow P(-X \leq x)$ $P(X \geq -x)$
 $\Rightarrow P(X \leq -x)$ $1 - P(X \leq -x)$
 $\Rightarrow F(-x)$ $\boxed{1 - F(-x)}$

$G(x) = F(-x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } -x < 0 \\ 1 & \text{si } -x \geq 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

On peut alors en déduire que $-X \sim \mathcal{E}(1)$.

$$c) E(X) = -E(-X) = -\frac{1}{1} = \boxed{-1}$$

$$V(X) = V(-X) \text{ car } V(X) = (-1)^2 V(X) = V(X)$$

$$\Rightarrow V(X) = V(-X) = \frac{1}{1^2} = \boxed{1}$$

$$5. Y = X^2$$

$$a) E(Y) = E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 1 + (-1)^2 = \boxed{2}$$

$$b) F_Y(x) = P(Y \leq x)$$

$$= P(X^2 \leq x)$$

$$= P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x})$$

$$= F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$$

$$= F(\sqrt{x}) \text{ car } -\sqrt{x} \leq 0 \text{ donc } F(-\sqrt{x}) = 0$$

$$\text{On a obtenu : } F_Y(x) = F(\sqrt{x}) = \begin{cases} 1 - e^{-\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

la dérivée de

c) la densité est la fonction de répartition donc :

$$\text{si } x \geq 0 : f_Y(x) = [F_Y(x)]' = 0 \text{ et si } x < 0 : [F_Y(x)]' =$$

Copie anonyme - n°anonymat : 746584

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 285

Nombre de pages : 23

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques T - Excp BS

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$0 - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}} = \boxed{-\frac{1}{2\sqrt{e}}}$$

$$\text{Ainsi : } f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{e}} & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Exercice 2.

$$1. a) \text{ D'une part : } A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 11 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 8 \\ 8 & 12 & 8 \\ 16 & 16 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'autre part : } 8A = \begin{pmatrix} 24 & 8 & 8 \\ 8 & 24 & 8 \\ 16 & 16 & 32 \end{pmatrix}$$

$$\text{Enfin : } A^2 - 8A = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

On obtient alors : $A^2 - 8A = -12I$

$$\boxed{a = -12}$$

$$b) A^2 - 8A = -12I$$

$$\Rightarrow A(A - 8I) = -12I,$$

$$A \times \left(-\frac{1}{12}\right)(A - 8I) = I, \text{ A est inversible.}$$

$$\text{Ainsi : } A^{-1} = \boxed{-\frac{1}{12}(A - 8I)}.$$

c) $Q(x) = x^2 - 8x + 12 = 0$, est un polynôme annulateur de la matrice A.

Les valeurs propres possibles sont à chercher parmi les racines d'un polynôme annulateur.

$\Rightarrow \Delta = 64 - 4 \times 1 \times 12 = 16$, il y a donc 2 valeurs propres possibles.

$$x_1 = \frac{8-4}{2} = \boxed{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{8+4}{2} = \boxed{6}$$

Les valeurs propres possibles de A sont 2 et 6.

$$2a) X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$AX = 6X$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3x + y + z \\ x + 3y + z \\ 2x + 2y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x \\ 6y \\ 12 \end{pmatrix}$$

On obtient le système suivant:

$$\begin{cases} 3x + y + z = 6x \\ x + 3y + z = 6y \\ 2x + 2y + z = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + y + z = 0 \\ x - 3y + z = 0 \\ 2x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \quad L_1 \rightarrow L_1 + L_2$$

~~$$\begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ x - 3y + z = 0 \\ 2x + 2y + 4z - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{On a } x = y.$$~~

$$b) A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Une des valeurs propres de A est 2

$$3a) PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$PQ = 4I$$

$$\Rightarrow P \times \frac{1}{4} Q = I, \text{ P est inversible .}$$

$$\Rightarrow \boxed{P^{-1} = \frac{1}{4} Q}$$

$$b) AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & 0 \\ 12 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & 0 \\ 12 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 746584

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 285

Nombre de pages : 23

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques T - Esch. B.S

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

On obtient : $AP = PD$

$\Rightarrow P^{-1}AP = D$, D étant diagonale on conclut que A est diagonalisable.

c) Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

au rang $n=0$: $A^0 = A^0 = I$

$$PD^0P^{-1} = PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I$$

La propriété est vraie au rang $n=0$.

On suppose : $A^n = PD^nP^{-1}$ et on démontre : $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

$$\begin{aligned}\text{On a supposé : } A^n &= PD^nP^{-1} \\ \Rightarrow AA^n &= APD^nP^{-1} \\ \Rightarrow A^{n+1} &= PDD^nP^{-1} \\ \Rightarrow A^{n+1} &= PD^{n+1}P^{-1}\end{aligned}$$

car $AP = PD$.

La propriété est vraie au rang $n+1$, elle est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

d) D^n est diagonale donc

$$D^n = \begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

je pose $6^n = a$ et $2^n = b$.

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ a & -b & 0 \\ 2a & 0 & -b \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} a & b & b \\ a & -b & 0 \\ 2a & 0 & -b \end{pmatrix} \times \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \dots & \dots & a+b-2b \\ \dots & \dots & a-b \\ \dots & \dots & 2a-2b \end{pmatrix}$$

La dernière colonne de A^n :
$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6^n - 2^n \\ 6^n - 2^n \\ 2(6^n - 2^n) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{2^n}{2^2} \begin{pmatrix} \left(\frac{6}{2}\right)^n - 1 \\ \left(\frac{6}{2}\right)^n - 1 \\ 2\left(\left(\frac{6}{2}\right)^n - 1\right) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 2^{n-2} \begin{pmatrix} 3^n - 1 \\ 3^n - 1 \\ 2(3^n - 1) \end{pmatrix}$$

$$4. a) X_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ p_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $\{C_n; P_n; D_n\}$ forme un système complet, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(C_{n+1}) = \underbrace{P(C_{n+1})}_{C_n} \times P(C_n) + \underbrace{P(C_{n+1})}_{P_n} \times P(P_n) + \underbrace{P(C_{n+1})}_{D_n} \times P(D_n)$$

$$c_{n+1} = \boxed{\frac{1}{2} c_n + \frac{1}{6} p_n + \frac{1}{6} d_n.}$$

De même : $P(P_{n+1}) = \underbrace{P(P_{n+1})}_{C_n} \times P(C_n) + \underbrace{P(P_{n+1})}_{P_n} \times P(P_n) + \underbrace{P(P_{n+1})}_{D_n} \times P(D_n)$

$$p_{n+1} = \boxed{\frac{1}{6} c_n + \frac{1}{2} p_n + \frac{1}{6} d_n}$$

De même : $P(D_{n+1}) = \underbrace{P(D_{n+1})}_{C_n} \times P(C_n) + \underbrace{P(D_{n+1})}_{P_n} \times P(P_n) + \underbrace{P(D_{n+1})}_{D_n} \times P(D_n)$

$$d_{n+1} = \boxed{\frac{1}{3} c_n + \frac{1}{3} p_n + \frac{2}{3} d_n}$$

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} c_n + \frac{1}{6} p_n + \frac{1}{6} d_n \\ \frac{1}{6} c_n + \frac{1}{2} p_n + \frac{1}{6} d_n \\ \frac{1}{3} c_n + \frac{1}{3} p_n + \frac{2}{3} d_n \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{0_r} \quad \frac{1}{6} A X_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ n_n \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} c_n + \frac{1}{6} n_n + \frac{1}{6} d_n \\ \frac{1}{6} c_n + \frac{1}{2} n_n + \frac{1}{6} d_n \\ \frac{1}{3} c_n + \frac{1}{3} n_n + \frac{2}{3} d_n \end{pmatrix}$$

On a bien obtenu: $X_{n+1} = \frac{1}{6} A X_n$.

c) On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a:

$$X_n = \frac{1}{6^{n-1}} A^{n-1} X_1.$$

au rang $n=1$: $X_n = X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{6^{n-1}} A^{n-1} X_1 = \frac{1}{6^0} A^0 X_1 = 1 \times I \times X_1 = X_1$$

La propriété est vraie au rang $n=1$.

On suppose: $X_n = \frac{1}{6^{n-1}} A^{n-1} X_1$ et on démontre: $X_{n+1} = \frac{1}{6^n} A^n X_1$

On a supposé: $X_n = \frac{1}{6^{n-1}} A^{n-1} X_1$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} A X_n = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6^{n-1}} \times A A^{n-1} X_1$$

$$\Rightarrow X_{n+1} = \frac{1}{6^n} \times A^n \times X_1$$

$$\text{Car } X_{n+1} = \frac{1}{6} A X_n$$

La propriété est vraie au rang $n+1$, elle est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Copie anonyme - n°anonymat : 746584

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 285

Nombre de pages : 23

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques T-Escl BS

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$d) X_n = \frac{1}{6^{n-1}} A^{n-1} X_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6^{n-1}} \times 2^{n-3} \begin{pmatrix} 3^{n-1} & -1 \\ 3^{n-1} & -1 \\ 2(3^{n-1} + 1) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$X_n = \frac{2^{n-3}}{6^{n-1}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2(3^{n-1} + 1) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d_n = \frac{2^{n-2}(3^{n-1} + 1)}{6^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \text{j'admet que } d_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3^{n-1}} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{n-1} = +\infty \text{ car } 3 > 0$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 0$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 3.

1a) Il est clair que le nombre de billes paires dans l'urne lorsque $n = 2N$ est égale à N , car si $2N$ est lui-même pair, alors la répartition sera égale.

b) $X \sim U(\llbracket 1, n \rrbracket)$ car il y a une équiprobabilité de tirer une bille.

donc $P(X=k) = \frac{1}{n}$ et $E(X) = \frac{n+1}{2}$, $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

$Y \sim B(1/2)$ car n est un nombre pair.

$E(Y) = p = \frac{1}{2}$ et $V(Y) = pq = \frac{1}{4}$

2) **return** $X+Y$.

3) X et Y sont indépendantes, car X correspond au premier tirage que l'on effectue et Y correspond au tirage que l'on fait à la suite de cela. Il y a donc indépendance car il y a remise de la boule entre le 1^{er} tirage et le 2^{ème}.

4) $X+Y(\Omega) = \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ car l'ensemble des

Valeurs possibles de X et Y peuvent qu'être des entiers naturels
 et le minimum peut être obtenu en tirant 1 la
 1^{ère} fois et en tirant un chiffre pair ensuite, alors
 $X+Y=1$ car $1+0=1$
 et si la 1^{ère} fois on tire la boule n et ensuite on tire
 une boule impaire alors: $X+Y=n+1$

donc: $X+Y(\Omega) = [1; n+1]$

5e) $P(X+Y=1)$

$\Rightarrow P(X=1) \cap (Y=0)$

car X ne peut pas être égale à 0

$\Rightarrow P(X=1) \times P(Y=0)$

par indépendance

$\Rightarrow \frac{1}{n} \times \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2n}}$

$P(X+Y=n+1)$

$\Rightarrow P(X=n) \times P(Y=1)$



il y a autant de chance
de tirer une paire que l'impaire

$\Rightarrow \frac{1}{n} \times \frac{1}{2}$

car $X \sim U(1, n)$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2n}}$

X et Y sont équiprobables, on remarque ici que
 $X+Y$ est également équiprobable.

b) $P(X+Y=k)$, d'après la formule des probabilités totales = $P[(X=k-1) \cap (Y=1)] \cup P[(X=k) \cap (Y=0)]$

car pour que $X+Y=k$, il faut que soit $X=k-1$
ou $X=k$
car $Y=1$ ou $Y=0$

$\Rightarrow P(X=k-1) \times P(Y=1) + P(X=k) \times P(Y=0)$ par incompatibilité

$$\Rightarrow \frac{k-1}{n} \times \frac{1}{2} + \frac{k}{n} \times \frac{1}{2} \quad \forall k \leq n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{k-1+k}{n} \right) \Rightarrow \boxed{\frac{1 \times 2k-1}{2n}}$$

$$c) \sum_{k=1}^{n+1} P(X+Y=k) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n+1} 2k-1$$

6a) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ par linéarité de l'espérance

$$= \frac{n+1+1}{2} = \frac{n+2}{2}$$

Cela correspond au gain moyen du joueur, le score moyen

b) 4,939 est le score moyen en bout de 1000 parties

Copie anonyme - n°anonymat : 746584

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 285

Nombre de pages : 23

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques T - Esch BS

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie II.

1) a) $P(X=1)$
(X est paire)

signifie que l'on a pioché au début une boule paire sur un total de $2N$ billes, au tirage suivant il y aura donc $2N-1$ billes.
Il reste donc $N-1$ billes paires et N billes impaires donc la probabilité d'avoir tiré une boule paire puis une boule impaire lorsqu'il y a n'y a pas de remise se note :

$$P(X=1) = \frac{N}{2N-1}$$

(X est paire)

← nombre de billes ~~pour~~ impaires restantes

$$P(X=1) = \frac{N-1}{2N-1} \quad \text{car } N-1 \text{ est le nb de billes impaires après le 1er tirage}$$

← nombre boules totales au 2^{ème} tirage

b) D'après la formule des probabilités totales :

$$P(X=1) = P(X=1) \times P(X \text{ est paire}) + P(X=1) \times P(X \text{ est impaire})$$

(X est paire) (X est impaire)

$$= \frac{N}{2N-1} \times \frac{1}{2} + \frac{N-1}{2N-1} \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{N+N-1}{2N-1} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{2N-1}{2N-1} = \frac{1}{2} \times 1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

c) X ne peut être égale qu'à 0 ou 1 donc si $P(X=1) = \frac{1}{2}$
alors $P(X=0) = \frac{1}{2}$

Ce qui donne la loi de X :

h	0	1
$P(X=h)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} 2) P((X=1) \cap (Y=1)) &= P(X=1) \times P(Y=1) \\ &= \frac{N-1}{2N-1} \times \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$b) P(X=1) \times P(Y=1) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2n}$$

$\neq$

$$P((X=1) \cap (Y=1))$$

Donc X et Y ne sont pas indépendantes

3) Il faut voir si l'espérance de $X+Y$ dans ce cas est supérieure à l'expérience précédente.

Exercice n°4.

1) $U_1 = 1$ et $U_2 = 1$

a) D'après l'énoncé on a :

$$(n+1)U_{n+2} = (2n+1)U_{n+1} - nU_n$$

$$\Rightarrow (1+1)U_3 = (2 \times 1 + 1)U_2 - U_1$$

$$\Rightarrow 2U_3 = 3U_2 - U_1$$

$$\Rightarrow 2U_3 = 3 - 1$$

$$\Rightarrow 2U_3 = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{U_3 = 1}$$

Pour U_4 donc pour $n=2$:

$$3U_4 = (5)U_3 - 2U_2$$

$$3U_4 = 5 \times 1 - 2 \times 1$$

$$3U_4 = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{U_4 = 1}$$

b) Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$V_n = 1 \text{ et } V_{n+1} = 1$$

au rang $n=1$: $V_n = V_1 = 1$

$$V_{n+1} = V_2 = 1$$

La propriété est vraie au rang $n=1$.

On suppose : $V_n = 1$ et $V_{n+1} = 1$ et on démontre que

$$V_{n+1} = 1 \text{ et } V_{n+2} = 1$$

On sait que : $(n+1)V_{n+2} = (2n+1)V_{n+1} - nV_n$

Par hypothèse de récurrence : $n+1 = 2n+1 - n$

$$\Rightarrow n+1 = n+1.$$

Ainsi on a $V_{n+2} = 1$.

La propriété est vraie au rang $n+1$, elle est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Soit $S_N = \sum_{h=1}^N \frac{1}{h}$

$$i). S_{2N} = \sum_{h=1}^{2N} \frac{1}{h} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2N}$$

$$S_N = \sum_{h=1}^N \frac{1}{h} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 746584

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 285

Nombre de pages : 23

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques T - Exp BS.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\begin{aligned} & N > N \\ \Rightarrow & \frac{1}{2N} < \frac{1}{N} \\ \Rightarrow & \frac{1}{2N} - \frac{1}{N} < \end{aligned}$$

$$S_{2N} - S_N = \frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{2N}$$

$$\text{ii) } S_{N+1} - S_N = \sum_{h=1}^{N+1} \frac{1}{h} - \sum_{h=1}^N \frac{1}{h}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} \right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} \right)$$

$$= \frac{1}{N+1} > 0$$

$$\text{car } N > 0$$

$$\Rightarrow N+1 > 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N+1} < 1 < 0$$

On peut supposer que la suite est donc croissante

$$4a) W_1 = \frac{e^{1(1-1)}}{1}$$

$$= 1$$

$$b) W_{n+1} = \frac{e^{(n+1)(U_{n+2} - U_{n+1})}}{n+1}$$

Pour montrer que (W_n) est constante, il faut prouver que $W_{n+1} = W_n = W_1 = 1$

$$c) \frac{e^{n(U_{n+1} - U_n)}}{n} = 1$$

~~$$\frac{\ln(n(U_{n+1} - U_n))}{n} = 1$$~~

~~$$= \ln(n) + \ln(U_{n+1} - U_n)$$~~

~~$$\ln\left(\frac{e^{n(U_{n+1} - U_n)}}{n}\right) = 1$$~~

$$\Rightarrow \ln(e^{n(U_{n+1} - U_n)}) - \ln(n) = 1$$

$$\Rightarrow n(U_{n+1} - U_n) = \ln(n) = 1$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n}$$

5) sur $[3; +\infty[$ $f(x)$ est de la forme $\frac{U}{V}$ avec

$$U(t) = \ln(t) \quad U'(t) = \frac{1}{t}$$

$$V(t) = t \quad V'(t) = 1$$

$$f'(t) = \frac{1 - \ln(t)}{t^2} \geq 0 \text{ sur } [3; +\infty[$$

donc f est croissante sur cette intervalle.

