



22-00202
432398
Mat Appro

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 25

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

(1) a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \underline{\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$

b) on pose $f: x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = 0.$$

Donc f est constante sur $\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow f(1) = 2\arctan(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

c) soit $h: x \mapsto \arctan(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = h'(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1. \quad \text{d'où, } \underline{\underline{\arctan(x) \sim x}}_{x \rightarrow 0}$$

(2) a) on a $\mathcal{D}f$ est centré sur 0.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = \frac{2}{\pi(e^{-x} + e^x)} = f(x). \quad \text{Donc } \underline{\underline{f \text{ est paire.}}}$$

f est continue sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto e^x + e^{-x} \neq 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad e^{-x} > 0 \\ \Rightarrow e^x + e^{-x} > e^{+x} \\ \Rightarrow \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < \frac{e^{-x}}{e^{+x}} \\ \hookrightarrow \text{par décroissance de la fonction} \\ \text{inverse sur } \mathbb{R}_+^+.$$

or, $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ converge (densité d'une loi exponentielle de paramètre 1).

D'après le critère de comparaison des fonctions positives, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$ converge.

avec la p-value de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge.

$$b) \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^{x^2} + 1}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \left(\lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\arctan(e^x) \right]_B^A \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\lim_{A \rightarrow +\infty} \arctan(e^A) - \lim_{B \rightarrow -\infty} \arctan(e^B) \right)$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} e^A = +\infty. \quad \text{Par composition} \Rightarrow \lim_{A \rightarrow +\infty} \arctan(e^A) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{B \rightarrow -\infty} e^B = 0. \quad \text{Par composition} \Rightarrow \lim_{B \rightarrow -\infty} \arctan(e^B) = 0.$$

$$\text{D'où, } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

f est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

Donc f est une densité de probabilité.

$$(3) \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{2 e^t}{\pi(e^t + 1)} dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\lim_{B \rightarrow -\infty} [\arctan(e^t)]_B^x \right) \end{aligned}$$

$$\text{car } \lim_{B \rightarrow -\infty} \arctan(e^B) = 0.$$

$$= \frac{2}{\pi} \arctan(e^x)$$

(4) a) F est une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$.
Donc F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, 1[$.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ d'après le théorème de la bijection monotone.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a F^{-1} existe d'après a).

$$\begin{aligned} P(U \leq x) &= P(F(X) \leq x) \\ &= P(X \leq F^{-1}(x)) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{croissance de } F^{-1} \text{ sur }]0, 1[. \end{array} \right. \\ &= P(F^{-1}(x)) \\ &= x \end{aligned}$$

$$\text{et ainsi, } P(U \leq x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x \in]0, 1[\\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Donc $U \sim \mathcal{U}(]0, 1[)$

$$\forall y \in]0, 1[$$

$$y = F(x) \Rightarrow y = \frac{2}{\pi} \arctan(e^x)$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2} y\right) = e^x$$

$$\Rightarrow \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} y\right)\right) = x$$

$$\forall y \in]0, 1[, \quad \underline{F^{-1}(y) = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} y\right)\right)}$$

c) $\begin{cases} \text{def } (x): \\ U = \text{rd.random} \\ \text{return : np.log(np.tan((np.pi/2)U))} \end{cases}$

⑤ a) X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ converge absolument.

$$\text{or, } \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{2x e^x}{\pi(e^x + 1)} \leq \frac{2}{\pi} x e^x$$

or, $\int_0^{+\infty} x e^x dx$ converge (espérance d'une loi exponentielle de paramètre 1).

D'après le critère de comparaison des fonctions positives, $\int_0^{+\infty} x f(x) dx$ converge.

or, $x \mapsto x f(x)$ est impair.

d'où, $E(X) = 0$.

b) X^2 admet une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge absolument.

Copie anonyme - n°anonymat : 432398

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 25

Session : 2024

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques Appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\text{or, } \forall x \in \mathbb{N}_+ \quad \frac{2x^2 e^x}{\pi(e^{x^2} + 1)} \sim \frac{2x^2 e^x}{\pi}$$

or, $\int_0^{+\infty} x^2 e^x dx$ converge (car une loi exponentielle de paramètre 1 admet une variance)

D'après le critère de comparaison des fonctions positives, $\int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge.

$x \mapsto x^2 f(x)$ est positive.

Donc $\int_{-\infty}^0 x^2 f(x) dx$ converge.

Finalement, $E(x^2)$ existe.

⑥ a) on pose $u = nt$.

$\gamma(t) = nt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{N}_+$ et réalise une bijection croissante de $\mathbb{N}_+$ dans $\mathbb{N}_+$.

D'après le théorème du changement de variable:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt &= \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{n^2} e^{-u} \frac{du}{n} \\ &= \frac{1}{n^3} \Gamma(3) \\ &= \frac{2}{n^3} \end{aligned}$$

$$c) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

$$\Rightarrow \frac{1+e^{-2t}}{1+e^{-2t}} > 1 \quad \text{par décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\Rightarrow \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} \leq t^2 e^{-(2p+3)t}$$

or, d'après a) en posant $n = 2p+3$.

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2p+3)t} dt = \frac{2}{(2p+3)^3}$$

d'où, par positivité de la fonction $t \mapsto \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}}$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} dt \leq \frac{2}{(2p+3)^3}$$

d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} dt = 0$$

d) on utilise c).

comme la fonction $t \mapsto (-1)^p$ est bornée.

$$\text{on a } \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} dt = 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^p (-1)^k \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t} dt = I.$$

on multiplie par $\frac{2}{\pi}$

et comme $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t} dt = \frac{2}{(2k+1)^3}$

$$= \frac{2}{\pi} I = \frac{4}{\pi} \times \frac{\pi^3}{32}$$

$$\Rightarrow E(X^2) = \frac{\pi^2}{8}$$

D'après la formule de Koenig Huygens:

$$\underline{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{\pi^2}{8}}$$

⑦ a) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$G(x) = P(Y \leq x) = P(e^X \leq x)$$

$$\underline{\forall x \leq 0: G(x) = 0.}$$

$\forall x > 0$: par la croissance de la fonction logarithme sur $\mathbb{M}_+$

$$= P(X \leq \ln(x))$$

$$= \underline{\frac{2}{\pi} \arctan(x)}$$

Bilan: $G(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{2}{\pi} \arctan(x) & x > 0 \end{cases}$

G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.
Donc G est continue sur $] -\infty, 0[$ et sur $] 0, +\infty[$.

continuité en 0: $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\pi} \arctan(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} G(x)$

Donc G est continue en 0, donc sur $\mathbb{R}$.

Donc Y est bien une variable aléatoire à densité.

$$b) \forall x \in \mathbb{R}, P(\Pi_n \leq x)$$

$$= P\left(\bigwedge_{i=1}^n Y_i \leq x\right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{les } Y_1, \dots, Y_n \text{ sont} \\ \text{mutuellement indépendantes.} \end{array} \right\}$$

$$= \prod_{i=1}^n P(Y_i \leq x)$$

$$= \prod_{i=1}^n P(Y \leq x) \quad \left. \begin{array}{l} \text{les } Y_1, \dots, Y_n \text{ suivent la} \\ \text{même loi que } Y. \end{array} \right\}$$

$$= (G(x))^n$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi} \arctan(x)\right)^n & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Exercice 3:

Partie 1:

$$\textcircled{1} \forall (x, y) \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$f(\lambda x + y) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, \lambda x + y \rangle u_i \quad \left. \begin{array}{l} \text{bilinearité du} \\ \text{produit scalaire.} \end{array} \right\}$$

$$\stackrel{\text{par produit}}{=} \sum_{i=1}^p \lambda_i (\langle u_i, \lambda x \rangle u_i + \langle u_i, y \rangle u_i)$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i + \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, y \rangle u_i$$

$$= \lambda f(x) + f(y).$$

$$\Rightarrow \lambda x + y \in E, \text{ est linéaire .}$$

$$\forall x \in E$$

$$\langle u_i, x \rangle \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i \in U.$$

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 25

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Approfondies.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\Rightarrow f(x) \in E.$$

Donc f est un endomorphisme de E .

$$\forall (x, y) \in E.$$

$$\begin{aligned} \langle f(x), y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i, y \right\rangle \quad \text{bilinéarité} \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle \langle u_i, y \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \langle x, f(y) \rangle &= \left\langle x, \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, y \rangle u_i \right\rangle \quad \text{bilinéarité} \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, y \rangle \langle x, u_i \rangle \quad \text{par symétrie} \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle \langle u_i, y \rangle \\ &= \langle f(x), y \rangle. \end{aligned}$$

Donc f est un endomorphisme symétrique de E .

$$(2) \text{ Dans ce cas, } f(x) = \sum_{i=1}^p \langle u_i, x \rangle u_i$$

$$(3) \text{ a) } \forall x \in \ker(f), \Rightarrow f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i = 0$$

$$\text{or, } \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_i \neq 0 \text{ et } u_i \neq 0.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^p \langle u_i, x \rangle = 0$$

par positivité du produit scalaire,
 $\Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \langle u_i, x \rangle = 0$

$$= \underbrace{(\ker(f))^\perp}_{= (\text{vect}(u_1, \dots, u_p))^\perp}.$$

Réciproquement, $\forall x \in (\text{vect}(u_1, \dots, u_p))^\perp$.

$$f(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i = 0 = \underbrace{(\text{vect}(u_1, \dots, u_p))^\perp \cap \ker(f)}$$

Finalement, par double inclusion, $\ker(f) = \underbrace{(\text{vect}(u_1, \dots, u_p))^\perp}$

Or, E est euclidien.

$$\Rightarrow \underline{\dim \ker(f) = \dim E - p}.$$

b) D'après le théorème du rang,
 $\dim \ker(f) + \dim \text{Im}(f) = \dim E$.

d'après a), $\Rightarrow \underline{\dim \text{Im}(f) = p}$.

$\forall x \in E$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i.$$

$$\Rightarrow \text{Im}(f) \subset \text{vect}(u_1, \dots, u_p).$$

Finallement par inclusion et égalité des dimensions,
 $\text{Im}(f) = \text{vect}(u_1, \dots, u_p)$.

(4) $f(u_1) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, u_1 \rangle u_i$

or, u est orthonormale.

$$= \lambda_1 \|u_1\|^2 u_1$$

$$= \lambda_1 u_1.$$

$\forall k \in \{1, \dots, p\}$

$f(u_k) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, u_k \rangle u_i$

$$= \lambda_k \|u_k\|^2 u_k$$

$= \lambda_k u_k$.

Ainsi, $E_{\lambda_k}(f) = \text{vect}(u_k)$.

Partie 2:

(5) Par unicité de la limite, le vecteur y est unique.

(6) $\forall x \in E$

$$\|f(x)\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i, \sum_{p=1}^p \lambda_p \langle u_p, x \rangle u_p \right\rangle.$$

bilinéarité, $= \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle \cdot \sum_{p=1}^p \lambda_p \langle u_p, x \rangle \langle u_i, u_p \rangle$

or, u est orthonormale

$$= \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \langle u_i, x \rangle^2$$

en appliquant la fonction racine carrée sur $\mathbb{N}_+$
 $\Rightarrow \|f(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \langle u_i, x \rangle}$

$$\alpha, K \leq 1.$$

$$\exists x \langle u_i, x \rangle \geq 0.$$

$$\Rightarrow K \langle u_i, x \rangle \leq \langle u_i, x \rangle$$

⑦ a) $P(n) : \|x_n\| \leq K^n \|x_0\|$
montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie
pour tout entier naturel n .

initialisation: $n=0 \quad \|x_0\| = K^0 \|x_0\|$.

$P(0)$ vraie

hérédité: soit n un entier naturel fixe,
on suppose $P(n)$ vraie.

$$\|x_n\| \leq K^n \|x_0\|.$$

d'après ⑥: $\|f(x_n)\| \leq K \|x_n\|$

par hypothèse
de récurrence (, $\Rightarrow \|x_{n+1}\| \leq K \|x_n\|$
 $\Rightarrow \|x_{n+1}\| \leq K^{n+1} \|x_0\|$.

Donc $P(n+1)$ vraie.

D'après le théorème de récurrence, $P(n)$ est vraie
pour tout entier naturel n .

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 25

Session : 2024

Épreuve de :

mathématiques Approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème :

Partie 1 :

① a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $[0, 1]$.

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt - \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$$

par linéarité de l'intégrale

$$= \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} \left(\frac{1}{1+t^2} - 1 \right) dt$$

or, $\forall t \in [0, 1]$ $1+t^2 > 1$ par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{N}_+^*$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+t^2} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+t^2} - 1 < 0.$$

d'après le théorème de positivité des intégrales,
 $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n} \left(\frac{1}{1+t^2} - 1 \right)$ est continue sur $[0, 1]$
 $\Rightarrow -(u_{n+1} - u_n) > 0$.

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n$ donc (u_n) est décroissante,

$\forall n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue et positive sur $[0; 1]$.

d'après le théorème de positivité des intégrales,
 $\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \geq 0$. donc $v_n \geq 0$.

b) d'après le théorème de la limite monotone,
 (v_n) étant décroissante et minorée, elle converge.

(2) a) soit $h: x \mapsto -e^{x/2} + 1 + x$.

$$\forall x \in [0; 1] \quad h'(x) = 1 - \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$$

or, $\forall x \in [0; 1] \quad \frac{x}{2} \leq 1$ par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow e^{\frac{x}{2}} \leq e$$

$$\Rightarrow -e^{\frac{x}{2}} \geq -e$$

$$\Rightarrow 1 - e^{\frac{x}{2}} \geq 1 - e$$

b) on applique l'inégalité précédente : $\forall n \in \mathbb{N}$
on pose $t^2 = x \in [0; 1]$

$$\Rightarrow (e^{-t^2/2})^n \leq (1 + t^2)^n$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{n t^2}{2}} \geq \frac{1}{(1+t^2)^n}$$

par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$

ces fonctions étant continues sur $[0; 1]$,

par croissance de l'intégrale, $0 \leq 1$:

$$\Rightarrow \underline{u_n \leq \int_0^1 e^{-\frac{nt^2}{2}} dt}.$$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ en posant une variable à densité
suivant une loi normale centrée de variance
 $\frac{1}{(Vn)^2}$.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Vn}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{nt^2}{2}} dt = 1.$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{nt^2}{2}} dt = \underline{\frac{\sqrt{2\pi}}{Vn}}.$$

d) on reprend l'inégalité de la (2) b),
 (u_n) est positive d'après (1) a).

$$\text{or, } \int_0^1 e^{-\frac{nt^2}{2}} dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{nt^2}{2}} dt \text{ par } \underline{\text{positivité de l'intégrale}}.$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{Vn}.$$

d'après le théorème d'encadrement,
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Partie 2:

(3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$
ou $\forall t \in \mathbb{R}_+$ $t \cdot (1+t^2) \neq 0$.

$$\text{or, } \frac{1}{(1+t^2)^n} \sim \frac{1}{t^{2n}} \geq 0$$

or $\forall n \in \mathbb{N}^*$ l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}} dt$ converge car $\underline{\alpha = 2n > 1}$.

D'après le critère d'équivalence des fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ converge.

Par continuité de la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ sur le segment $[0, 1]$,

l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ converge.

(4) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [1; +\infty[$,

$$1+t^2 > t^2$$

$$\Rightarrow (1+t^2)^n > t^{2n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+t^2)^n} < \frac{1}{t^{2n}}$$

l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}} dt$ converge.

Pour croissances de l'intégrale, on pose $A > 1$.

$$= \int_1^A \frac{1}{(1+t^2)^n} dt < \int_1^A \frac{1}{t^{2n}} dt$$

$$= I_n < \int_1^A \frac{1}{t^{2n+1}} dt$$

$$= I_n < \frac{1}{-2n+1} \times \frac{1}{A^{-2n+1}} + \frac{1}{2n-1}$$

$$\text{or } \lim_{A \rightarrow \infty} A^{-2n+1} = 0.$$

$$\text{d'où, } 0 < I_n < \frac{1}{2n-1}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 432398

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 25

Session : 2024

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques A approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

avec la positivité de $\bar{I}_n$.

b) d'après le théorème d'encadrement,

$$\sum_{n \rightarrow +\infty} \bar{I}_n = 0.$$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = \bar{I}_n + v_n$.

d'après $\sum_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$ avec (1) b) et (2d)

(5) a) on pose $u'(t) = 1$ $v(t) = (1+t^2)^{-n}$
 $u(t) = t$ $v'(t) = -2nt(1+t^2)^{-n-1}$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
 d'après le théorème d'intégrations par parties:

$A > 0$: $J_n = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^A + 2n \sum_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt.$

$$= \sum_{A \rightarrow +\infty} \frac{A}{(1+A^2)^n} - 0 + 2n \sum_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{t^2 + 1 - 1}{(1+t^2)^{n+1}} dt$$

or $\frac{A}{(1+A^2)^n} \underset{A \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{A^{2n}} \underset{A \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{A^{2n-1}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{d'où } \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{A}{(1+A^2)^n} = 0.$$

$$\Rightarrow \underline{J_n = 2n (\bar{J}_n - \bar{J}_{n+1})}.$$

$$b) \bar{J}_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} [\arctan(t)]_0^A$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 = \underline{\frac{\pi}{2}}$$

$$c) \text{ soit } S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\bar{J}_k}{k}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} 2(\bar{J}_k - \bar{J}_{k+1}) \quad \text{d'après (5) a)}$$

$$\Rightarrow S_n = 2\bar{J}_1 - 2\bar{J}_n \quad \downarrow \text{ par télescopage}$$

$$\text{or, d'après (4) c), } \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{J}_n = 0.$$

$$\text{d'après (5) b), } \bar{J}_1 = \frac{\pi}{2}.$$

et ainsi en étant passé par les sommes partielles, nous avons que $\sum_{n \geq 1} \frac{\bar{J}_n}{n}$ converge

$$\text{et } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\bar{J}_k}{k} = 2\bar{J}_1 = \underline{\frac{\pi}{2}}.$$

d) def suite $\bar{J}(n)$:
 $\bar{J} = (np.\text{pie}) / 2$
 for k in range $(2, n+1)$:
 $\bar{J} = ((2*k-1) / (2*k)) \bar{J}$
 return $\bar{J}$.

⑥ $\bar{J}(n)$: " $J_{n+1} = \frac{\hat{\pi}}{2} \times \frac{(2n)!}{4^n}$ "

montrons par récurrence que $\bar{J}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n :

initialisation: $n=0$
 d'après ⑤ b) $\bar{J}_1 = \frac{\hat{\pi}}{2}$
 $= \frac{\hat{\pi}}{2} \times \frac{(2 \times 0)!}{4^0}$

done $\bar{J}(0)$ vraie.

hérédité: soit n un entier naturel
 on suppose $\bar{J}(n)$ vraie.

d'après ⑤ a) $\bar{J}_{n+2} = \left(\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} \right) \bar{J}_{n+1}$

$$\Rightarrow \bar{J}_{n+2} = \frac{\hat{\pi}}{2} \times \frac{(2n)!}{n! \cdot n! \cdot 4^n} \times \frac{1}{2(n+1)} (2(n+1)-1)$$

$$= \frac{\hat{\pi}}{2} \times \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n! \cdot 4^n \times 2} \times (2n+1) \times \frac{2n+2}{2n+2}$$

$$= \frac{\hat{\pi}}{2} \times \frac{(2n)! \times (2n+1) \times (2n+2)}{(n+1)! \cdot (n+1)! \cdot 4^{n+1}}$$

$$= \frac{\hat{\pi}}{2} \times \frac{\left(\frac{2(n+1)}{(n+1)} \right)}{4^{n+1}}$$

done $\bar{J}(n+1)$ vraie.

D'après le théorème de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Partie 3 :

(7) a) on répète $2n$ fois des épreuves de Bernoulli indépendantes dont la probabilité du succès, "obtenir pile" est de $\frac{1}{2}$.

Donc $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, \frac{1}{2})$.

$$b) P(X_n = Y_n) = \sum_{k=0}^{2n} P(X=k) P(Y=k)$$

les lancers sont supposés indépendants

$$= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \binom{2n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} = \frac{2}{\pi} \bar{J}_{n+1}$$

$$\text{on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{J}_{n+1} = 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = Y_n) = 0.$$

c) Les variables X_n et Y_n suivent la même loi.

$$\text{Donc } \underline{P(X_n < Y_n) = P(X_n > Y_n)}.$$

(8) a) X_n : "le nombre de piles obtenus sur $2n$ lancers

$\forall k \in \{1; 2n\}$ Z_k : "vaut 1 si le $k^{\text{ème}}$ lancer vaut pile".

$$Z_k(1) = \{0; 1\} \quad Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 25

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Les variables aléatoires Z_k sont mutuellement indépendantes car les lancers sont indépendants.

Par stabilité par somme de loi de Bernoulli.

$$\text{on a } \sum_{k=1}^{2n} Z_k = X_n.$$

Exercice 1:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2,$$

(1) a) $\bar{J}_n$ est formé de n colonnes identiques non nulles
donc $\text{rg}(\bar{J}_n) = 1$.

D'après le théorème du rang,
 $\dim \ker(\bar{J}_n) + \dim(\text{Im}(\bar{J}_n)) = n$.

$$\Rightarrow \underline{\dim \ker(\bar{J}_n) = n - 1} \quad \geq 0 \quad \text{car } n \geq 2.$$

$$\text{et ainsi, } \underline{E_0(\bar{J}_n) = n - 1}.$$

$$b) \bar{J}_n V_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & & \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{n V_n} \quad \text{avec } \underline{V_n \neq 0}.$$

donc V_n est un vecteur propre de $\bar{J}_n$ comme V_n est non nulle.

c) donc $SP(\bar{J}_n) = \{0, n\}$

② $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$

$x \mapsto \sum_{k=1}^n x_k^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ car elle est polynomiale.

$x \mapsto \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ car elle est polynomiale.

Par composition, $x \mapsto \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

Par différence de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$,
 f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

③ a) $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$d_i f_n(x) = \frac{2}{n} x_i - \frac{2}{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)$$

$$= \frac{2}{n} \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)$$

b) f_n admet un point critique en a si et seulement si $\nabla f(a) = (0, 0, \dots, 0)$.

$$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \frac{2}{n} \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) = 0$$

en posant $\sum_{k=1}^n x_k = d$.

$$\Rightarrow \frac{2}{n} x_i = \frac{2}{n^2} d$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{d}{n}$$

et ainsi $a = \left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \dots, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)$.

(4) a) $\Delta_{i,i}^2 f_n(x) = \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}$

D'après le théorème de Schwarz, $\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$
 $i \neq j$.

$\Delta_{i,j}^2 f_n(x) = -\frac{2}{n^2} = \Delta_{j,i}^2 f_n(x)$.

b) Ainsi, $\nabla^2 f_n(a, a, \dots, a) = \begin{pmatrix} \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} & -\frac{2}{n^2} & \dots & -\frac{2}{n^2} \\ -\frac{2}{n^2} & \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} & \dots & -\frac{2}{n^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{2}{n^2} & \dots & -\frac{2}{n^2} & \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} \end{pmatrix}$

$$= -\frac{2}{n^2} \overline{J}_n + \frac{2}{n} \overline{I}_n$$

$$= \frac{2}{n^2} (n \overline{I}_n - \overline{J}_n).$$

c) $\bar{I} = \text{rd} \cdot \text{id}(n)$
 $\bar{J} = \text{np} \cdot \text{ones}(1)$
 Hessianne = $(2/(n**2))(n*\bar{I} - \bar{J})$.

d) avec ① $\Rightarrow \text{SP}(f_n) = \{0; n\}$.

et ainsi comme $0 \in \text{SP}(f_n)$, on ne peut pas conclure pour savoir si f_n possède un extrémum local.

⑤ a) $v = (1; \dots; 1)$
 $r = (x_1^2; \dots; x_n^2)$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

b) d'après ⑤ a)

$$\Rightarrow n \sum_{k=1}^n x_k^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \geq 0$$

on divise par $\frac{1}{n^2} \geq 0$

$$\Rightarrow f_n(x) \geq 0.$$

Ainsi, f_n admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$ et ce minimum est atteint pour chaque point critique de f_n .

⑥ a) $z = (1/n)(x**2 + x**2) - (1/(n**2))(x**2 + y**2)$

Copie anonyme - n°anonymat : 432398

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 25

Session : 2024

Épreuve de :

Mathématiques Approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

⑧ b) c'est la surface n° 2 car d'après
⑤ b), f_2 achète un minimum global.

Question ⑧ c) exercice : problème :

d'après ⑧ b) et ⑦ d), $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \leq Y_n) = \frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n < Y_n)$.

Question ⑧ b) exercice problème :

on a par linéarité de l'espérance
 $E(X_n) = \sum_{k=1}^n E(Z_k) = 2n \times \frac{1}{2} = n$.

par indépendance des Z_k $V(Z_k) = 2n \times \frac{1}{4}$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE



