

Copie anonyme - n°anonymat : 985422



W7-00099
985422
Mat2 Appli

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 32

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 1:

① Comme A est symétrique, A est diagonalisable.

Ainsi, il existe une matrice D diagonale et une matrice P carrée inversible (toutes deux appartenant à $M_n(\mathbb{R})$) telles que :

$$A = P D P^{-1}$$

Autrement dit, $P^{-1} A P = D$

Et ainsi, il y a bien l'existence d'une matrice carrée inversible appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1} A P$ soit une matrice diagonale.

Également, on sait que les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A .

Donc les éléments diagonaux de $P^{-1} A P$ sont les valeurs propres de A .

② On remarque que $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc -1 est valeur propre de A .

on remarque que $L_2 = L_3$ donc A n'est pas inversible et 0 est valeur propre de A .

On remarque également que 2 est valeur propre de A car $A - 2I$ n'est pas inversible.

Ainsi, on a toutes les valeurs propres de A .

$$\text{Sp}(A) = \{-1, 0, 2\}$$

$$\text{Et } \varepsilon(A) = |-1| + |0| + |2| = 2 + 1 = 3$$

On a bien $\varepsilon(A) = 3$ dans ce cas.

(3)

```

import numpy as np
import numpy.linalg as al
def energie(A)
    → vap = al.eigvals(A)
    a, b = np.shape(A)
    for i in range(a):
        for j in range(b):
            S = S + np.abs(vap[i, j])
    return S

```

j'ai oublié de mettre: "S = 0"

(4) a)

On a $AB = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

avec $\forall (i,j) \in \mathbb{I}_{1,n}^2$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$

$$\text{D'où, } \text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n c_{i,i}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,i} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{j,i}$$

$$\text{On a bien } \text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,i} \right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{j,i}$$

$$\begin{aligned}
 b) \text{ On a donc } \operatorname{tr}(AB) &= \sum_{1 \leq i, j \leq m} a_{i,j} b_{j,i} \\
 &= \sum_{1 \leq i, j \leq m} b_{j,i} a_{i,j} \\
 &= \operatorname{tr}(BA)
 \end{aligned}$$

On a bien $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq m}$, alors ${}^t A = (a_{j,i})_{1 \leq i, j \leq m}$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où, } \operatorname{tr}({}^t A A) &= \sum_{1 \leq i, j \leq m} a_{j,i} a_{j,i} \\
 &= \sum_{1 \leq i, j \leq m} a_{j,i}^2
 \end{aligned}$$

On a bien :

$$\operatorname{tr}({}^t A A) = \sum_{1 \leq i, j \leq m} a_{j,i}^2$$

Si $\operatorname{tr}({}^t A A) = 0$, alors $\sum_{1 \leq i, j \leq m} a_{j,i}^2 = 0$

Or, $\forall i, j \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $(a_{j,i})^2 \geq 0$ comme c'est un carré

Donc $\sum_{1 \leq i, j \leq m} (a_{j,i})^2 = 0 \Rightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2, a_{j,i} = 0$

Copie anonyme - n°anonymat : 985422

Emplacement QR Code	Code épreuve : 287	Nombre de pages : 32	Session : 2024
	Épreuve de : Mathématiques appliquées		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			
Finalement, si $\text{tr}(A^t A) = 0$, alors $A = 0_{n \times n}(\mathbb{R})$			
c)			
Avec $\text{tr}(P(A P^{-1}))$, on a alors $\text{tr}(P(A P^{-1})) = \text{tr}(A P^{-1} P)$ $= \text{tr}(A P^{-1} P)$ $= \text{tr}(A)$			
Or A et B sont semblables			
Autrement dit $B = P A P^{-1}$			
D'où $\text{tr}(B) = \text{tr}(A)$			
On a bien $\text{tr}(B) = \text{tr}(A)$ lorsque A et B sont semblables			
5/32			

⑤ a) On a $|\operatorname{tr}(A)| = \left| \sum_{i=1}^m a_{i,i} \right| \leq \sum_{i=1}^m |a_{i,i}|$

b) $\operatorname{tr}(A^2) = \sum a_{i,i}$

⑥ a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) On a $\text{tr}(A) = 2 + 2 + 2 = 6$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

D'où $\text{tr}(A^2) = 6 + 6 + 6 = 18$

De plus on voit que 0 est valeur propre de A.

On comprend donc que $\text{Sp}(A) = \{0; 3\}$

Par conséquent, on a bien $\text{tr}(A) = 6$

Partie 2 :

⑦

a) import numpy as np

import numpy as np
def prod2K(u, v, w, A) :

b) $\text{prod2K}(1, -1, 2, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix})$

⑧

a) On a $(U * A)Y = \begin{pmatrix} uAx + vAx \\ vAx + wAx \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (ua + vb)AX \\ (va + wb)AX \end{pmatrix}$$

$$= \mu \begin{pmatrix} (ua + vb)X \\ (va + wb)X \end{pmatrix}$$

car $AX = \mu X$
comme X est un
vecteur propre de
 A associé à la
valeur propre μ

On a bien : $(U * A)Y = \mu \begin{pmatrix} (ua + vb)X \\ (va + wb)X \end{pmatrix}$

Copie anonyme - n°anonymat : 985422

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 32

Session : 2024

Emplacement
QR Code

Épreuve de : mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

b)

$$\begin{aligned} \text{On a donc } (U^*A)^T &= \mu \begin{pmatrix} (vb + ua)X \\ (va + wb)X \end{pmatrix} \\ &= \mu \begin{pmatrix} (\frac{vb}{a} + u) aX \\ (\frac{va}{b} + w) bX \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c)
d)

veuillez tourner la page svp

9 / 32

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b)

c)

a)

veuillez tourner la page svp

10

d)

b)

reullery tower to page 200

11/

Partie 3 :

(11)

a)

~~Comme $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$ est la matrice d'adjacence de $G(A)$, alors $\sum_{1 \leq i,j \leq m} a_{i,j}$ est la somme~~

$$\text{On a } \sum_{(i,j) \in I^2} a_{i,j} = \sum_{1 \leq i,j \leq m} a_{i,j} - \sum_{(i,j) \notin I^2} a_{i,j}$$

Or, $\forall (i,j) \notin I^2$, $a_{i,j} = 0$ comme I représente l'ensemble des sommets non isolés de $G(A)$ et que A est la matrice d'adjacence de $G(A)$ (donc le coefficient $a_{i,j}$ de A est bien nul si les sommets i et j ne sont pas adjacents).

$$\text{Donc } \sum_{1 \leq i,j \leq m} a_{i,j} - \sum_{(i,j) \notin I^2} a_{i,j} = \sum_{1 \leq i,j \leq m} a_{i,j} - 0 = \sum_{1 \leq i,j \leq m} a_{i,j}$$

Et ainsi, on a :

$$\sum_{1 \leq i,j \leq m} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in I^2} a_{i,j}$$

Les sommes sont bien égales à $2m$ car les coefficients de A sont valables au nombre d'arêtes reliant

Copie anonyme - n°anonymat : 985422

Emplacement QR Code	Code épreuve : 287	Nombre de pages : 32	Session : 2024
	Épreuve de : Mathématiques appliquées		
	Consignes - Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer - Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir - Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) - Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) - Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre		

i et j , mais compte deux fois car $a_{i,j} = a_{j,i}$ est d'arêtes entre i et j .

Ainsi, on a bien :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in E} 2 = 2m$$

b) Il y a $n - p$ sommets isolés.

Ponc il y a p sommets non isolés

Il y a donc au maximum $\frac{p(p-1)}{2}$ arêtes (si tous les sommets sont reliés à un autre sommet, puis on divise par 2 car on a compté deux fois chaque arête).

Et il y a au minimum $\frac{p}{2}$ arête si chaque sommet n est relié qu'à un seul autre sommet.

Ainsi, on a $\frac{p}{2} \leq m \leq \frac{p(p-1)}{2}$

$$\Rightarrow p \leq 2m \leq p(p-1)$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{2m}{p} \leq p-1$$

13/32

Ainsi, on a bien :

$$1 \leq \frac{2m}{p} \leq p-1$$

(12) a) On sait que A est symétrique comme $a_{ij} = a_{ji}$

Ainsi, il existe une matrice carrée inversible P appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1} A P$ est diagonale.

Montrons que $P^{-1} A P$ n'est pas nulle

~~On pose $D = P^{-1} A P$~~

~~Car alors A et D qui sont semblables et $\text{tr}(A) = \text{tr}(D)$~~

~~non abouti~~

b) On a $\text{tr}(A) = \text{tr}(D)$ car A et D sont semblables

Or $\text{tr}(A) = 0$ car $G(A)$ est sans boucle (donc tous les a_{ii} pour $i \in \{1, m\}$ sont nuls)

D'où, $\text{tr}(D) = 0$

On sait par ailleurs que $D^2 = P^{-1} A^2 P$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } \text{tr}(D^2) &= \text{tr}(A^2) \quad \text{car } {}^t A = A \text{ car } A \text{ est symétrique} \\
 &= \text{tr}({}^t A A) \\
 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ji}^2 \\
 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2
 \end{aligned}$$

$$\text{On a } \text{tr}(D^2) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2$$

13

$$a) \quad E_k \in \text{ker}(A) \Rightarrow A E_k = 0$$

Or La ligne k et la colonne k de A sont composées de 0.

A l'inverse, E_k est composée de 0 entièrement, sauf à la ligne k .

Donc le produit de ces deux matrices donne bien 0.

Et ainsi, lorsque b est un sommet isolé, on a bien:

$$E_b \in \ker(A)$$

Or il y a $n-p$ sommets isolés

Donc il y a $n-p$ matrices E_b telle que $E_b \in \ker(A)$

Une famille de ces matrices est évidemment libre car $(E_1, \dots, E_n)$ est libre.

Donc comme il y a $n-p$ matrices libres au minimum appartenant à $\ker(A)$, on a bien:

$$\dim(\ker(A)) \geq n-p$$

On admet le dernier résultat.

b)

$$\text{On a vu que } \text{tr}(D^2) = \text{tr}(A^2) = 2m$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \text{tr}(A^2) &= \sum_{k=1}^m \lambda_k^2 = \sum_{k=1}^p \lambda_k^2 + \sum_{k=p+1}^m \lambda_k^2 \\ &= \sum_{k=1}^p \lambda_k^2 + 0 \end{aligned}$$

d'après la question précédente

$$\text{On a bien : } \sum_{k=1}^p \lambda_k^2 = 2m$$

Copie anonyme - n°anonymat : 985422

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 32

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(i, j) \in [1, n]^2$

On a : $(x_i - x_j)^2 \geq 0$ car un carré est toujours positif

$$\Rightarrow x_i^2 - 2x_i x_j + x_j^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow x_i^2 + x_j^2 \geq 2x_i x_j$$

$$\Rightarrow \sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i^2 + x_j^2) \geq \sum_{1 \leq i, j \leq n} 2x_i x_j$$

$$\text{On a bien } \sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i^2 + x_j^2) \geq \sum_{1 \leq i, j \leq n} 2x_i x_j$$

$$\text{On a alors } \sum_{i=1}^n (x_i^2 + x_i^2) \geq \sum_{i=1}^n 2x_i x_i$$

Autrement dit :

$$2x_j \sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 + nx_j^2$$

$$\Leftrightarrow nx_j^2 - 2x_j \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$$

On reconnaît un polynôme du second degré dont le discriminant est négatif.

Autrement dit, on a :

$$\left(-2 \sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - 4n \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$$

(14)

$$a) (Q^{-1}) = ({}^t P)^{-1} = (P^{-1})^{-1} = P = {}^t ({}^t P) = {}^t Q$$

$$\text{On a bien } \underline{Q^{-1} = {}^t Q}$$

$$\text{On a } \underline{A = P D P^{-1} = {}^t Q D Q}$$

$$\begin{aligned} \text{On a } {}^t Y Y &= {}^t (Q X) Y \\ &= {}^t X {}^t Q Y \\ &= {}^t X {}^t Q Q X \\ &= {}^t X Q^{-1} Q X \\ &= {}^t X X \end{aligned}$$

$$\text{On a bien } \underline{{}^t Y Y = {}^t X X}$$

$$\begin{aligned} b) \text{ On a } {}^t X A X &= {}^t X {}^t Q D Q X \\ &= {}^t (Q X) D Q X \\ &= {}^t Y D Y \end{aligned}$$

$$\text{On a bien : } \underline{{}^t X A X = {}^t Y D Y}$$

Soit $D = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $Y = (y_{i,1})_{1 \leq i,j \leq n}$

On a $DY = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, avec :

$$\forall i,j \in \{1,n\}, c_{i,j} = \sum_{k=1}^n d_{i,k} y_{k,1}$$

On a $d_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ d_{i,i} = d_i & \text{si } i = j = i \end{cases}$

Et on peut noter $y_{k,1} = y_k$

On obtient alors $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n d_k y_k$

Car ${}^t Y \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et $DY \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Donc ${}^t Y D Y \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et on montre de la même manière que l'on vient de calculer $c_{i,j}$, que

$${}^t Y D Y = \sum_{k=1}^n d_k y_k y_k = \sum_{k=1}^n d_k y_k^2$$

On a bien :

$${}^t X A X = {}^t Y D Y = \sum_{k=1}^n d_k y_k^2$$

c) $\theta \sum_{k=1}^n y_k^2 = \theta {}^t Y Y = \theta {}^t X X$

Et ${}^t X A X = \sum_{k=1}^n d_k y_k^2$

Il faut donc montrer que $\theta \sum_{k=1}^n y_k^2 \geq \sum_{k=1}^n d_k y_k^2$

Copie anonyme - n°anonymat : 985422

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 32

Session : 2024

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Or $\theta = \max_{1 \leq k \leq n} \lambda_k$ donc $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k \leq \theta$

Donc $\frac{\lambda_k}{\theta} \leq 1$

$\Rightarrow \frac{\lambda_k}{\theta} y_k^2 \leq y_k^2$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\theta} y_k^2 \leq \sum_{k=1}^n y_k^2$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2 \leq \theta \sum_{k=1}^n y_k^2$

Ce qui prouve bien :

$$\boxed{E X A X \leq \theta^2 X X}$$

(15)

a) On a déjà vu que $\sum_{(i,j) \in \mathbb{I}^2} a_{i,j} = 2m$

b) On a $\sqrt{\frac{2m}{p}} \leq \frac{2m}{p} \leq \theta$

car on a vu que $\frac{2m}{p} \geq 1$
 d'où $\sqrt{\frac{2m}{p}} \leq \frac{2m}{p}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{p}} \leq \frac{\sqrt{2m}}{p} \leq \frac{\theta}{\sqrt{2m}}$$

et $\theta \leq \sqrt{2m}$ donc $\frac{\theta}{\sqrt{2m}} \leq 1$

Ainsi, on a bien :

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \leq \frac{\sqrt{2m}}{p} \leq \frac{\theta}{\sqrt{2m}} \leq 1$$

(16)

a) Soit $x \in [0, 1]$

Est dérivable sur $[0, 1]$ comme composée puis

somme de fonctions dérivables sur les intervalles adéquats.

$$\text{On a alors, } \forall x \in [0; 1[, F'(x) = 1 + \frac{-2x(p-1)}{2\sqrt{(p-1)(1-x^2)}}$$

$$= 1 - \frac{x\sqrt{p-1}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{p-1}}{\sqrt{1-x^2}}$$

Le résultat est le signe de $x \mapsto \sqrt{1-x^2} - x\sqrt{p-1}$

Or, supposons que $\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{p-1} \geq 0$

$$\text{alors } \sqrt{1-x^2} \geq x\sqrt{p-1}$$

$$\text{donc } 1-x^2 \geq px^2 - x^2$$

c'est à dire

$$\frac{1}{p} \geq x^2$$

$$\text{ou encore } \sqrt{\frac{1}{p}} \geq x$$

Ainsi, F est croissante sur $[0; \sqrt{\frac{1}{p}}]$ et décroissante sur $[\sqrt{\frac{1}{p}}; 1[$

Il reste à étudier F en 1.

$$\text{On a } \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \frac{x + \sqrt{(p-1)(1-x^2)} - x}{x - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{p-1} \sqrt{1-x^2}}{x-1}$$

On pose $x = x+1$

$$\text{On a alors } \frac{\sqrt{p-1} \sqrt{1-(x+1)^2}}{x}$$

$$= \frac{\sqrt{p-1} \sqrt{1-x^2} \cdot -2x-1}{x}$$

$$= \frac{\sqrt{p-1} \sqrt{-x^2(1+\frac{2}{x})}}{x}$$

not abouth

remember to turn the page

Copie anonyme - n°anonymat : 985422

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 32

Session : 2024

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

b) On a donc vu que F admettait un maximum en $\sqrt{\frac{1}{p}}$

Donc, pour tout $x \in [0; 1]$,

$$x + \sqrt{(p-1)(1-x^2)} \leq \sqrt{\frac{1}{p}} + \sqrt{(p-1)\left(1 - \frac{1}{p}\right)}$$

~~Or on a $\sqrt{2m} F\left(\frac{\sqrt{2m}}{p}\right) = \sqrt{2m} \left(\frac{\sqrt{2m}}{p} + \sqrt{(p-1)\left(1 - \frac{\sqrt{2m}}{p}\right)} \right)$

$$= \frac{2m}{p} + \sqrt{(p-1)\left(2m - \frac{2m\sqrt{2m}}{p}\right)}$$~~

Or on a $\sqrt{2m} F\left(\frac{\sqrt{2m}}{p}\right) \leq \sqrt{2m} F\left(\sqrt{\frac{1}{p}}\right)$

$$\leq \sqrt{2m} \left(\sqrt{\frac{1}{p}} + \sqrt{(p-1)\left(1 - \frac{1}{p}\right)} \right)$$

$$\leq \sqrt{\frac{2m}{p}} + \sqrt{(p-1)\left(1 - \frac{2m}{p}\right)}$$

Et $\frac{2m}{p} \leq 0$ donc $\sqrt{2m} F\left(\frac{\sqrt{2m}}{p}\right) \leq 0 + \sqrt{(p-1)(2m - 0^2)}$

D'où finalement et après la question (13) d):

$$E(A) \leq$$

Se rend compte qu'il y a un problème dans mon calcul,

se pense avoir la bonne méthode mais je ne le trouve pas.

non abouti

(17)

a)

$A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$A + I_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Chaque ligne est identique donc $A + I_n$ n'est pas inversible.

Donc $A - (-I_n)$ n'est pas inversible.

Ainsi, -1 est une valeur propre de A .

Déterminons le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 :

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

On a : $X \in E_{-1}(A) \Leftrightarrow (A + I_n)X = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \dots + x_n = 0 \\ x_1 + \dots + x_n = 0 \\ \vdots \\ x_1 + \dots + x_n = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_n \in \mathbb{R}, x_{n-1} \in \mathbb{R}, \dots, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{et } x_1 = -x_n - x_{n-1} - \dots - x_2$$

On en conclut bien que le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est de dimension $n-1$.

$$c) \text{ On a } A - (n-1)I_n = \begin{pmatrix} 1-n & 1 & & & 1 \\ 1 & 1-n & & & 1 \\ & & \ddots & & \\ & & & 1-n & 1 \\ 1 & & & & 1-n \end{pmatrix}$$

$$\text{Or } \sum_{k=1}^{n-1} 1 = n-1 \text{ et } n-1 + 1-n = 0$$

$$\text{Or } \sum_{k=1}^{n-2} 1 + 1 = n-2 + 1-n + 1 = 0$$

$$\text{Ainsi, } L_1 + L_2 + \dots + L_{n-1} = L_n$$

Et donc $A - (n-1)I_n$ n'est pas inversible.

$n-1$ est bien une valeur propre de A .

$$\text{Ainsi, } \mathcal{L}(A) = \underbrace{1+1+\dots+1}_{n-1 \text{ fois}} + n-1$$

$$= n-1 + n-1$$

$$= 2(n-1)$$

On a bien $\mathcal{L}(A) = 2(n-1)$

$$\text{Or, si } m = \frac{n(n-1)}{2} \text{ et } p = n, \text{ on a :}$$

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\frac{2m}{p} + \frac{1}{p} \sqrt{(p-1)2m(p^2-2m)} = \frac{m(n-1)}{n} + \frac{1}{n} \sqrt{\left(\frac{1}{n}-1\right)m(n-1) - \dots - (m^2 - m(n-1))}$$

$$= (n-1) + \frac{1}{n} \sqrt{((n-1) - m(n-1))(m^2 - m(n-1))}$$

$$= (n-1) + \frac{1}{n} \sqrt{(n-1)m^2 - m(n-1)^2 - m^2m(n-1) + m^2(n-1)^2}$$

$$= (n-1) + \sqrt{((n-1) - m(n-1))\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}$$

$$= (n-1) + \sqrt{(n-1)(1-m)\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}$$

on suppose que $\sqrt{(n-1)(1-m)\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)} = (n-1)$

et on montre alors que l'inégalité (1) est une égalité

(18)

import numpy as np

def Max(A) :

max_prob = 0

a, b = np.shape(A)

for i in range(a):

for j in range(b):

if A[i,j] > max_prob:

max_prob = A[i,j]

return max_prob

(19)

a) Soit $j \in [1; P]$, on a :

$$|\lambda_j|(\alpha + \beta) = \alpha|\lambda_j| + \beta|\lambda_j|$$

$$b) \text{ On a } |\lambda_j|(\alpha + \beta) \geq \lambda_j^2 + \alpha\beta$$

$$\text{donc } \sum_{j=1}^P |\lambda_j|(\alpha + \beta) \geq \sum_{j=1}^P (\lambda_j^2 + \alpha\beta)$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta \sum_{j=1}^P |\lambda_j| \geq \sum_{j=1}^P \lambda_j^2 + \sum_{j=1}^P \alpha\beta$$

$$\Rightarrow (\alpha + \beta) \varepsilon(A) \geq \varepsilon(A^2) + p \alpha \beta$$

On a bien $(\alpha + \beta) \varepsilon(A) \geq \varepsilon(A^2) + p \alpha \beta$

D'où, $\varepsilon(A) \geq \frac{\varepsilon(A^2) + p \alpha \beta}{\alpha + \beta}$

$\varepsilon(A^2) = 2m \quad \hookrightarrow \quad \geq \frac{2m + p \alpha \beta}{\alpha + \beta}$

On a bien :

$$\varepsilon(A) \geq \frac{2m + p \alpha \beta}{\alpha + \beta}$$

c) Soit $t \in \mathbb{R}^+$ et $(a, b) \in \mathbb{R}_+^n$

φ est bien dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$, et on a :

$$\varphi'(t) = \frac{b(b+t) - (a+bt)b}{(b+t)^2} = \frac{b}{(b+t)^2} (b+t - a+bt)$$

Cette expression est du signe de $t \mapsto (b+1)t + b - a$

Ainsi, φ' est positif sur $\left[\frac{a-b}{b+1} ; +\infty \right]$ et négatif sur

$$\left[0; \frac{a-b}{b+1}\right].$$

Donc φ est décroissante sur $\left[0; \frac{a-b}{b+1}\right]$ puis strictement croissante sur $\left]\frac{a-b}{b+1}; +\infty\right[$.

1)

On admet $2m \leq p\beta^2$

Ainsi, on a $\beta p \geq \frac{2m}{\beta}$

$$\text{on } \varepsilon(A) \geq \frac{2m + p\alpha\beta}{4 + \beta}$$

non about

(20)
a)