

Copie anonyme - n°anonymat : 985422



W7-00099
985422
Mat Appli

Code épreuve : 288

Nombre de pages : 28

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 1 :

① π est le nombre de parties à 3 éléments dans un ensemble à n éléments, donc :

$$\pi = \binom{n}{3}$$

② Soit $k \in [1, \pi]$ et $t_k = \{u, v, w\}$

T_k prend la valeur 1 si et seulement si t_k est un triangle de G et prend la valeur 0 sinon.

Or t_k est un triangle de G si et seulement si $\{u, v\}$, $\{v, w\}$ et $\{w, u\}$ sont des arêtes de G .

Cela est réalisé si les variables aléatoires $T_{u,v}$, $T_{v,w}$ et $T_{w,u}$ prennent toutes la valeur 1.

On comprend alors bien que $T_k = T_{u,v} T_{v,w} T_{w,u}$ car les variables $T_{u,v}$ pour $\{u, v\}$ décrivant les paires de sommets sont supposées indépendantes (d'où le produit).

Ainsi, si l'une des variables $T_{u,v}$, $T_{v,w}$ ou $T_{w,u}$ ne prend pas la valeur 1, T_k prend la valeur 0.

Cela se traduit bien par le fait que si l'un des couples $\{u, v\}$, $\{v, w\}$ et $\{w, u\}$ n'est pas une arête, alors T_k prend la valeur 0.

Finalement on a bien : $T_k = T_{u,v} T_{v,w} T_{w,u}$

b) Soit $h \in [1, n]$.

De ce qui suit, on conclut que on a :

$$\begin{aligned} P(Y_h = 1) &= P([T_{u,v} = 1] \cap [T_{v,w} = 1] \cap [T_{u,w} = 1]) \\ &= P(T_{u,v} = 1) P(T_{v,w} = 1) P(T_{u,w} = 1) \\ &= p \times p \times p \\ &= p^3 \end{aligned}$$

Finalement, $\forall h \in [1, n], Y_h \hookrightarrow \mathcal{B}(p^3)$

c) n étant le nombre de parties à trois éléments de l'ensemble des sommets de G , il y a n possibilités que la variable aléatoire Y_h prenne la valeur 1 (ou 0). En suite, comme Z_n compte le nombre de Triangles de G et que $Y_h = 1$ si il y a un triangle mais $Y_h = 0$ sinon, alors on a bien :

$$Z_n = \sum_{h=1}^n Y_h$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, on a } E(Z_n) &= E\left(\sum_{h=1}^n Y_h\right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{par linéarité de} \\ \text{l'espérance} \end{array} \right\} \\ &= \sum_{h=1}^n E(Y_h) \\ &= n E(Y_h) \quad \left. \begin{array}{l} \text{d'après la question ?} \\ \text{et car } E(Y_h) = p^3 \end{array} \right\} \\ &= \binom{n}{3} p^3 \end{aligned}$$

On a bien $E(Z_n) = \binom{n}{3} \cdot p^3$

(3)

a)

Soit X une variable aléatoire quelconque, on sait que

$$\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$$

Or, on sait que $V(Z_n) = V\left(\sum_{k=1}^n Y_k\right)$

Donc $V(Z_n) = \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n Y_i, \sum_{j=1}^n Y_j\right)$

Et de plus, on sait que $\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n Y_i, \sum_{j=1}^n Y_j\right) = \sum_{(i,j) \in [1,n]^2} \text{Cov}(Y_i, Y_j)$
par linéarité de la covariance.

Ainsi, on a bien :

$$V(Z_n) = \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n Y_i, \sum_{j=1}^n Y_j\right) = \sum_{(i,j) \in [1,n]^2} \text{Cov}(Y_i, Y_j)$$

le) Si $(i, j) \in F$, alors t_i et t_j sont différents donc ils n'ont évidemment pas trois éléments en commun (car ils sont composés de 3 éléments) et ils n'ont pas non plus 2 éléments en commun par définition de F .
Donc ils en ont 1 ou 0

Notons u cet élément v et w les deux autres éléments de t_i et v' et w' les deux autres éléments de t_j .

$$\text{On a alors } \gamma_i = T_{u,v} T_{v,w} T_{u,w}$$

$$\gamma_j = T_{u,v'} T_{v',w'} T_{u,w'}$$

On voit bien alors que γ_i et γ_j sont indépendantes car les variables $T_{u,v}$ pour $\{u, v\}$ décrivant les paires de sommets avec $u < v$ sont supposées indépendantes et que là toutes les variables $T_{u,v}$ en jeu sont différentes.

Finalement, si $(i, j) \in F$, alors γ_i et γ_j sont indépendantes.

On sait que si $(i, j) \in F$, γ_i et γ_j sont indépendants et alors

$$\sqrt{\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \in F}}^n \gamma_i\right)} = \sqrt{V(\gamma_i)}$$

non abouti.

Copie anonyme - n°anonymat : 985422

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 288

Nombre de pages : 28

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

c)

On a donc :

$$V(Z_m) = \sum_{i=1}^n V(Y_i) + \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \text{cov}(Y_i, Y_j)$$

$$= n V(Y_i) + \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} E(Y_i Y_j) - \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} E(Y_i) E(Y_j)$$

car on est
équiprobable
à éléments
de $\mathcal{E}$
et car
 $V(Y_i)$
 $= p^3(1-p^3)$
car $Y_i \in \{0,1\}$

$$= n p^3(1-p^3) + \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} E(Y_i Y_j) - a_m p^3 p^3$$

Ainsi on a bien :

$$V(Z_m) = n p^3(1-p^3) + \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} E(Y_i Y_j) - a_m p^3$$

④ ~~On admet les deux premières questions.~~

On admet que si $i \equiv j$, $E(Y_i Y_j) = p^5$

Or, si $(i, j) \in \mathcal{E}$, alors $i \equiv j$ et alors $E(Y_i Y_j) = p^5$

$$\begin{aligned} \text{De ce fait, } \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} E(Y_i Y_j) &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} p^5 \\ &= a_n p^5 \end{aligned}$$

$$\text{On a bien } \Delta_n = a_n p^5$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} V(2n) &= n p^3 (1 - p^3) + a_n p^5 - a_n p^6 \\ &= \binom{n}{3} p^3 (1 - p^3) + a_n (p^5 - p^6) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{car } n = \binom{n}{3} \\ \text{(question 1)} \end{array} \right\}$$

$$\text{On a bien } V(2n) = \binom{n}{3} p^3 (1 - p^3) + a_n (p^5 - p^6)$$

(5)

a) u, v, w, y sont distincts donc il n'y a pas de remise et ce sont des éléments de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Ainsi l'ensemble cherché est l'ensemble des parties de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ à 4 éléments.

Le nombre de triples est donc :

$$\binom{n}{4}$$

b) non abstrait.

Partie 2 :

⑥

} - ... le
sujet.

for j in range(1, len(adj)):

if $i \neq j$ in L []:

$cpt + = 1$

return cpt

⑦ nbTriangles(L)

⑧

La fonction suivante calcule d'abord le nombre de graphes n'ayant aucun triangle lorsque l'on simule 1000 graphes aléatoires. Puis, la fonction divise le nombre obtenu par 1000.

On obtient alors une approximation de la probabilité qu'un graphe aléatoire (à n sommets et dont la probabilité que deux sommets soient adjacents est $\frac{1}{n}$) n'ait aucun triangle.

Copie anonyme - n°anonymat : 985422

Code épreuve : 288

Nombre de pages : 28

Session : 2024

Emplacement
QR Code

Épreuve de : mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 3:

g) Soit $(x, y) \in (X(\mathbb{R}))^2$

$\Rightarrow$ Supposons que $x \geq y$

Dans ce cas, par croissance de f et de g^V sur $X(\mathbb{R})$, on a :

$$f(x) \geq f(y) \text{ et } g(x) \geq g(y)$$

$$\Rightarrow f(x) - f(y) \geq 0 \text{ et } g(x) - g(y) \geq 0$$

$$\Rightarrow (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$$

Supposons que $y > x$

Dans ce cas, par croissance de f et g^V sur $X(\mathbb{R})$, on a :

$$f(x) - f(y) \leq 0 \text{ et } g(x) - g(y) \leq 0$$

Ainsi, comme le produit de deux éléments nuls est nul, on obtient bien :

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$$

En combinant les deux cas, on trouve bien:

$$\forall (x, y) \in (X(\pi))^2, (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$$

b) Soit $y \in X(\pi)$ et X une variable aléatoire finie.
On a alors:

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$$

$$\Rightarrow E((f(x) - f(y))(g(x) - g(y))) \geq 0$$

$$\Rightarrow E(f(x)g(x) - g(y)f(x) - f(y)g(x) + f(y)g(y)) \geq 0$$

$$\Rightarrow E(f(x)g(x)) - g(y)E(f(x)) - f(y)E(g(x)) + f(y)g(y) \geq 0$$

On a bien pour tout $y \in X(\pi)$:

$$E(f(x)g(x)) + f(y)g(y) \geq g(y)E(f(x)) + f(y)E(g(x))$$

c)

(10)

a)

$$\text{and } E(Y_{k+1} Z_{k+1}) = E\left(f(x_1, \dots, x_{k+1}) g(x_1, \dots, x_{k+1})\right)$$

non about

b)

non about

c) Soit $x \in X_{k+1}(\mathcal{I})$.

Comme f et g sont $(k+1)$ -croissantes sur $X_1(\mathcal{I}) \times \dots \times X_{k+1}(\mathcal{I})$,

alors $x \mapsto f(x_1, \dots, x_k, x)$ et $x \mapsto g(x_1, \dots, x_k, x)$ sont croissantes sur $X_{k+1}(\mathcal{I})$.

Ainsi, par croissance de l'espérance et comme la composée de fonctions croissantes est croissante, on obtient que

$$x \mapsto E(f(x_1, \dots, x_k, x)) \text{ et } x \mapsto E(g(x_1, \dots, x_k, x))$$

sont croissantes sur $X_{k+1}(\mathcal{I})$.

Autrement dit, u et v sont croissantes sur $X_{k+1}(\mathcal{I})$.

~~On a vu que pour tout $x \in X_{k+1}(\mathcal{I})$,~~

~~$$E(f(x_1, \dots, x_k, x)g(x_1, \dots, x_k, x)) \geq E(f(x_1, \dots, x_k, x)) \dots E(g(x_1, \dots, x_k, x))$$~~

~~Ainsi, en posant $x = X_{k+1}$ (car $X_{k+1} \in X_{k+1}(\mathcal{I})$), on obtient :~~

~~$$E(f(x_1, \dots, x_k, X_{k+1})g(x_1, \dots, x_k, X_{k+1})) \geq E(f(x_1, \dots, x_k, X_{k+1}))E(g(x_1, \dots, x_k, X_{k+1}))$$~~

~~Autrement dit, on a bien :~~

~~$$E(Y_{k+1} \geq X_{k+1}) \geq E(u(X_{k+1})v(X_{k+1}))$$~~

d) On admet que (H_{k+1}) est vraie.

Ainsi, on a montré que (H_1) était vraie.

On a alors supposé que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, (H_k) était vraie et on a montré que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, (H_{k+1}) l'était alors également.

C'est une preuve par récurrence.

Copie anonyme - n°anonymat : 985422

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 288

Nombre de pages : 28

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

On en conclut :

$\forall k \in \mathbb{N}^*, (H_k) \text{ est vraie.}$

e)

veuillez tourner la page svp

13/28

Partie 4:

(11)

Si $\bigcap_{0 \leq u < v \leq n-1} [T_{u,v} = 0]$ est réalisé, alors cela signifie que pour tous $(u,v) \in \mathbb{I}_{0,n-1}$, les $[T_{u,v} = 0]$ sont réalisés
la tels que $u < v$

Autrement dit, aucun sommet du graphe n'est relié aux autres.

Par conséquent, le graphe G n'a bien sur aucun triangle.

Et alors, $[Z_n = 0]$ est réalisé.

On a montré que si $\bigcap_{0 \leq u < v \leq n-1} [T_{u,v} = 0]$ était réalisé, alors $[Z_n = 0]$ également.

Cela se traduit bien par le fait que:

$$\bigcap_{0 \leq u < v \leq n-1} [T_{u,v} = 0] \subset [Z_n = 0]$$

$$\text{Ainsi, on a } P(Z_n = 0) \geq P\left(\bigcap_{0 \leq u < v \leq n-1} [T_{u,v} = 0]\right) \quad \downarrow \text{ par indépendance}$$

$$\geq \prod_{0 \leq u < v \leq n-1} P(T_{u,v} = 0)$$

$$\geq \prod_{0 \leq u < v \leq n-1} (1-p)$$

$$\geq (1-p)^{\binom{n}{2}}$$

En effet, il y a bien $\binom{n}{2}$ éléments tels que $0 \leq u < v \leq n-1$.

Et $(1-p)^{\binom{n}{2}} > 0$ car $p \in]0, 1[$

Ainsi, on a bien :

$$P(Z_n = 0) \geq (1-p)^{\binom{n}{2}} > 0$$

(12)

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On a $P(Y_i = 0) = 1 - p^3$ car $Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p^3)$

On a d'autre part $E(1 - Y_i) = 1 - E(Y_i)$
 $= 1 - p^3$ car $Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p^3)$

Ainsi, on a bien $P(Y_i = 0) = E(1 - Y_i)$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} P(Z_{n,i} = 0) &= P\left(\sum_{k=1}^i Y_k = 0\right) \quad \downarrow \text{variables de Bernoulli} \\ &= \prod_{k=1}^i P(Y_k = 0) \quad \downarrow \text{indépendantes} \\ &= \prod_{k=1}^i E(1 - Y_k) \quad \downarrow \text{on vient de le voir} \\ &= E\left(\prod_{k=1}^i (1 - Y_k)\right) \quad \downarrow \text{linéarité de l'espérance} \end{aligned}$$

On a bien $P(Z_{n,i} = 0) = E\left(\prod_{k=1}^i (1 - Y_k)\right)$

13)

a) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

Tout d'abord, $m = \binom{n}{2}$ car c'est le nombre de couples $(u, v) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tels que $u < v$.

Or pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $Y_k(\pi) = \{0, 1\}$ car $Y_k \in \mathcal{B}(p^3)$

Et on sait

monobout.

On admet que Y_k s'exprime comme une fonction m -croissante sur $\{0, 1\}^m$ de variables $t_{u,v}$ pour $u < v$ éléments de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Ainsi $-Y_i$ est le produit d'une fonction croissante par un réel négatif donc $-Y_i$ est m -décroissante, de même que $1 - Y_i$.

Donc, pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $1 - Y_i$ s'exprime bien comme une fonction m -décroissante de variables $t_{u,v}$.

Or pour tout $k \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket$, $Y_k \in \{0, 1\}$

donc $1 - Y_k \geq 0$.

Et ainsi, $\prod_{k=1}^{i-1} (1 - Y_k)$ est un produit de fonction positives et m -décroissantes.

Donc pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $\prod_{k=1}^{i-1} (1 - Y_k)$ s'exprime comme une fonction m -décroissante des $i-1$ variables aléatoires $t_{u,v}$

Copie anonyme - n°anonymat : 985422

Code épreuve : 288

Nombre de pages : 28

Session : 2024

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

b) Soit $i \in [1, n]$.

$$\text{On a } P(Z_{n,i} = 0) = E\left(\prod_{k=1}^i (1 - Y_k)\right) = E\left(\prod_{k=1}^{i-1} (1 - Y_k) \times (1 - Y_i)\right)$$

On voit alors d'après l'inégalité de Harris, qu'on a :

$$E\left(\prod_{k=1}^{i-1} (1 - Y_k) \times (1 - Y_i)\right) \geq E\left(\prod_{k=1}^{i-1} (1 - Y_k)\right) E(1 - Y_i)$$

Autrement dit, d'après la question 12, on a bien :

$$\forall i \in [2, n], P(Z_{n,i} = 0) \geq P(Z_{n,i-1} = 0) P(Y_i = 0)$$

$$\text{Ainsi, } P(Z_n = 0) \geq P(Z_{n,n-1} = 0) P(Y_n = 0)$$

$$\geq P(Z_{n,n-2} = 0) P(Y_{n-1} = 0) P(Y_n = 0)$$

$$\geq \dots$$

$$\geq P(Z_{n,1} = 0) \prod_{k=2}^n P(Y_k = 0)$$

$$= P(Y_1 = 0) \prod_{k=2}^n P(Y_k = 0)$$

$$= \prod_{k=1}^n P(Y_k = 0)$$

Ainsi, on a bien pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

$$P(Z_n = 0) \geq \prod_{k=1}^n P(Y_k = 0)$$

Or on sait que $P(Y_k = 0) = 1 - p^3$ et $n = \binom{n}{3}$

Ainsi, $\prod_{k=1}^n P(Y_k = 0) = \prod_{k=1}^n (1 - p^3) = (1 - p^3)^{\binom{n}{3}}$

On a bien $P(Z_n = 0) \geq (1 - p^3)^{\binom{n}{3}}$

14

Initialisation:

Soit $k=2$, on a $P(\bigcup_{i=1}^k B_i) = P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2)$
(formule de Poincaré en du crible)

D'autre part, on a $\sum_{i=1}^k P(B_i) = P(B_1) + P(B_2) \geq P(B_1) + P(B_2) - \dots - P(B_1 \cap B_2)$
(car une probabilité est toujours positive)

Ainsi, on a bien $P(\bigcup_{i=1}^k B_i) \leq \sum_{i=1}^k P(B_i)$ dans le [cas -

Hérédité

Soit $k \geq 2$, supposons que $P\left(\bigcup_{i=1}^k B_i\right) \leq \sum_{i=1}^k P(B_i)$

$$\text{On a } P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^k B_i \cup B_{k+1}\right)$$

par hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} &= P\left(\bigcup_{i=1}^k B_i\right) + P(B_{k+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^k B_i \cap B_{k+1}\right) \\ &< \sum_{i=1}^k P(B_i) + P(B_{k+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^k B_i \cap B_{k+1}\right) \end{aligned}$$

car une probabilité est toujours positive

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{k+1} P(B_i) - P\left(\bigcup_{i=1}^k B_i \cap B_{k+1}\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k+1} P(B_i) \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k+1} P(B_i)$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi, on a bien pour tout $k \geq 2$:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^k B_i\right) \leq \sum_{i=1}^k P(B_i)$$

15)

$$\text{On a } P_{B \cap C}(A) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)}$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part, } P_C(A) P_{A \cap C}(B) &= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \times \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap C)} \\ &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} \end{aligned}$$

$$\text{Or } B \cap C \subset C$$

$$\text{donc } P(B \cap C) \leq P(C)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P(B \cap C)} \geq \frac{1}{P(C)}$$

$$\Rightarrow \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \geq \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)}$$

On a donc bien :

$$P_{B \cap C}(A) \geq P_C(A) P_{A \cap C}(B)$$

16)

a) A_i et C_i sont indépendants car $C_i = \bigcap_{j \in J_i} A_j$

et $j \in J_i$ signifie que $j \neq i$

Autrement dit, E_i et E_j n'ont pas exactement deux éléments en commun non abouti.

Copie anonyme - n°anonymat : 985422

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 288

Nombre de pages : 28

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\text{On a } P_{B_i \cap C_i}(\bar{A}_i) = \frac{P(\bar{A}_i \cap B_i \cap C_i)}{P(B_i \cap C_i)}$$

$$\text{et } P(\bar{A}_i) P_{\bar{A}_i \cap C_i}(B_i) = P(\bar{A}_i) \frac{P(\bar{A}_i \cap B_i \cap C_i)}{P(\bar{A}_i \cap C_i)}$$

car A_i et C_i sont indépendants donc $\bar{A}_i$ et C_i également

$$\downarrow = P(\bar{A}_i) \frac{P(\bar{A}_i \cap B_i \cap C_i)}{P(\bar{A}_i) P(C_i)}$$

$$= \frac{P(\bar{A}_i \cap B_i \cap C_i)}{P(C_i)}$$

on retrouve par la même preuve que la question précédente :

$$P_{B_i \cap C_i}(\bar{A}_i) > P(\bar{A}_i) P_{\bar{A}_i \cap C_i}(B_i)$$

$$\text{b) On a } P_{\bar{A}_i \cap C_i}(B_i) = P_{\bar{A}_i \cap C_i}\left(\bigcap_{j \in I_i} \bar{A}_j\right)$$

formule de Morgan

$$\downarrow = P_{\bar{A}_i \cap C_i}\left(\bigcap_{j \in I_i} \bar{A}_j\right)$$

$$\downarrow = P_{\bar{A}_i \cap C_i}\left(\bigcup_{j \in I_i} A_j\right)$$

On suppose alors (je n'arrive pas à le prouver), que :

$$P_{A_i \cap C_i} \left(\bigcup_{j \in I_i} A_j \right) \geq 1 - \sum_{j \in I_i} P_{A_i \cap C_i}(\bar{A}_j)$$

On a alors :

$$P_{A_i \cap C_i}(B_i) \geq 1 - \sum_{j \in I_i} P_{A_i \cap C_i}(\bar{A}_j)$$

c) Soit $j \in [1, i-1]$

d) Soit $x \in \mathbb{R}$. et $x \in \mathbb{R}$

On sait que $e^x \geq x + 1$ car $x \mapsto e^x$ est convexe.

Ainsi, on a, en posant $-x = X$, on obtient :

$$e^{-x} \geq -x + 1$$

Finalement, on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 - x \leq \exp(-x)$$

En posant $x = P(\bar{A}_i) \left(1 - \sum_{j \in I_i} P_{\bar{A}_i}(\bar{A}_j) \right)$, on a :

$$1 - P(\bar{A}_i) \left(1 - \sum_{j \in I_i} P_{\bar{A}_i}(\bar{A}_j) \right) \leq \exp \left(-P(\bar{A}_i) \left(1 - \sum_{j \in I_i} P_{\bar{A}_i}(\bar{A}_j) \right) \right)$$

$$\begin{aligned} \text{or } \exp \left(-P(\bar{A}_i) \left(1 - \sum_{j \in I_i} P_{\bar{A}_i}(\bar{A}_j) \right) \right) &= \exp \left(-P(\bar{A}_i) + \sum_{j \in I_i} P(\bar{A}_i) P_{\bar{A}_i}(\bar{A}_j) \right) \\ &= \exp \left(-P(\bar{A}_i) + \sum_{j \in I_i} P(\bar{A}_j \cap \bar{A}_i) \right) \end{aligned}$$

On a donc

$$1 - P(\bar{A}_i) \left(1 - \sum_{j \in I_i} P_{\bar{A}_i}(\bar{A}_j) \right) \leq \exp \left(-P(\bar{A}_i) + \sum_{j \in I_i} P(\bar{A}_j \cap \bar{A}_i) \right)$$

ou encore (d'après la question précédente) :

$$P_{B_i \cap C_i}(A_i) \leq \exp \left(-P(A_i) + \sum_{j \in I_i} P(\bar{A}_j \cap \bar{A}_i) \right)$$

(17)

$$\begin{aligned}
 a) P(Z_m = 0) &= P\left(\sum_{k=1}^n Y_k = 0\right) \\
 &= P\left(\bigcap_{k=1}^n [Y_k = 0]\right) \\
 &= P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)
 \end{aligned}$$

On a bien $P(Z_m = 0) = P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$

On a $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P\left(A_1 \cap \bigcap_{i=2}^n A_i\right)$

$$= P(A_1)$$

On a $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) \dots P_{\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i}(A_n)$ (formule des probabilités composées)

$$= P(A_1) \prod_{i=2}^n P_{B_i \cap C_i}(A_i)$$

or $B_i \cap C_i = \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j$

On a bien :

$$P(Z_m = 0) = P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \prod_{i=2}^n P_{B_i \cap C_i}(A_i)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 985422

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 288

Nombre de pages : 28

Session : 2024

Épreuve de : mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

b)

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } P(Z_m = 0) &= P(A_1) \prod_{i=2}^n P_{B_i \cap (i)}(A_i) \\ &= P(A_1) \prod_{i=2}^n \exp \left(-P(A_i) + \sum_{j \in L_i} P(\overline{A_j} \cap \overline{A_i}) \right) \\ &= P(A_1) \exp \left(\sum_{i=2}^n \left(-P(A_i) + \sum_{j \in L_i} P(\overline{A_j} \cap \overline{A_i}) \right) \right) \end{aligned}$$

non abouti.

$$c) \text{ Or } P(Z_m = 0) \geq (1 - p^3)^{\binom{n}{3}} \quad (\text{question (1)} \text{ b})$$

$$\text{et } E(Z_m) = \binom{n}{3} p^3 \quad (\text{question (2)})$$

$$\text{et } A_m = a_m p^5 \quad (\text{question (4)})$$

Ainsi, on a bien :

$$(1-p^3)^{\binom{n}{3}} \leq P(Z_n = 0) \leq \exp\left(-\binom{n}{3} p^3 + \frac{a_n}{2} p^5\right)$$

18) Soit $c \in \mathbb{R}^+$

a) On a $\frac{a_n}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \times 2}$

et $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2}$

Pour $c = \left(\frac{c}{n}\right)^3 + \frac{a_n}{2} \left(\frac{c}{n}\right)^5 = -\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2} \left(\frac{c}{n}\right)^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \times 2} \left(\frac{c}{n}\right)^5$

$$= -\frac{c^3}{6} \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)c^2}{4n^5} \right)$$

~~$$= -\frac{c^3}{6} \left(\frac{n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{n^3} + \frac{n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right) c^2}{4n^5} \right)$$~~

Or $(n-1) \sim_{n \rightarrow +\infty} n$, $(n-2) \sim_{n \rightarrow +\infty} n$, $(n-3) \sim_{n \rightarrow +\infty} n$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} = 1$

mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)c^2}{4n^5} = 0$

on a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\binom{n}{3} \left(\frac{c}{n}\right)^3 + \frac{a_n}{2} \left(\frac{c}{n}\right)^5 \right) = -\frac{c^3}{2}$

résultat

b)

en $+\infty$, on a $\ln\left(1 - \frac{c^3}{n^3}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{c^3}{n^3}$ car $\frac{c^3}{n^3} \xrightarrow{+\infty} 0$

$$\text{donc } \binom{n}{3} \ln\left(1 - \frac{c^3}{n^3}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \frac{c^3}{n^3}$$

Et de la même manière que le a), on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{n}{3} \ln\left(1 - \frac{c^3}{n^3}\right) = -\frac{c^3}{6}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Si } p = \frac{c}{n} \text{ on a } (1-p)^3 \binom{n}{3} &= \left(1 - \frac{c^3}{n^3}\right) \binom{n}{3} \\ &= e^{\binom{n}{3} \left(1 - \frac{c^3}{n^3}\right)} \end{aligned}$$

$$\text{et } \exp\left(-\binom{n}{3} p^3 + \frac{an}{2} p^5\right) = \exp\left(-\binom{n}{3} \left(\frac{c}{n}\right)^3 + \frac{an}{2} \left(\frac{c}{n}\right)^5\right)$$

D'après les questions a) et b), on a par encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n = 0) = \exp\left(-\frac{c^3}{6}\right)$$

(19) (c=pn) Cela est bien, car pour x assez petit, on pose $x = \frac{pn^3}{6}$ qui est assez petit, on a alors :

$$\exp\left(-\frac{pn^3}{6}\right) \approx 1 - \frac{pn^3}{6} + \frac{pn^5}{12} \approx 1 - \left[\frac{pn^3}{6} \left(1 + \frac{pn^2}{2}\right)\right]$$

Imagine que $\left[\frac{pn^3}{6} \left(1 + \frac{pn^2}{2}\right)\right]$ soit être environ égal à $1 - 0,849$ mais je n'arrive pas à le prouver.

20

a)

$$c) P_{A_i \cap C_i}(\bar{A}_j) = \frac{P(\bar{A}_i \cap C_i \cap \bar{A}_j)}{P(\bar{A}_i \cap C_i)}$$

$$= \frac{P(\bar{A}_i \cap C_i \cap \bar{A}_j)}{P(\bar{A}_i) P_{\bar{A}_i}(C_i)}$$

$$= \frac{P(\bar{A}_i \cap_{i \in J_i} A_j \cap \bar{A}_j)}{P(\bar{A}_i) P_{\bar{A}_i}(C_i)}$$

~~OK~~ no about

veri

28/28