Copie anonyme - n°anonymat : 203943

G6-00023
203943
Mat2 Appro

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 28 | Session : 2024

Épreuve de : Maths 2 approfondies ESCP BS / HEC Paris

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I :

1)a) $X_{(n,n)}(\Omega) = X(\Omega) = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, P(X_{(n,n)} \leq x) = P(\max_{1 \leq i \leq n}(X_i) \leq x)$

$= P(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \leq x)$

$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x)$ par indépendance des $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$

$\forall x \in \mathbb{R}, F_{(n,n)}(x) = (F(x))^n$ car les X_i suivent toutes la même loi que X

Comme F est continue sur $\mathbb{R}$ (c'est la fonction de répartition de la variable à densité X), il en est de même pour $F_{(n,n)}(x)$ par composition de fonctions continues.
De même, le caractère C^1 de F sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points assure celui de $F_{(n,n)}$

De plus, $\lim_{x \to +\infty} F_{(n,n)}(x) = \lim_{x \to +\infty} (F(x))^n = 1$

$\lim_{x \to -\infty} F_{(n,n)}(x) = \lim_{x \to -\infty} (F(x))^n = 0$

Car F est croissante, $F_{(n,n)}$ l'est aussi.

Ainsi, $X_{(n,n)}$ est bien une variable aléatoire réelle à densité dont une densité est donnée en dérivant $F_{(n,n)}$ ie :

$\forall x \in \mathbb{R}, \; f_{(n,n)}(x) = n f(x) F(x)^{n-1}$

b) De même, $X_{(n,1)}(\Omega) = X(\Omega) = \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(X_{(n,1)} \leq x) = P\left(\min_{1 \leq i \leq n} X_i \leq x\right)$$

$$= 1 - P\left(\min_{1 \leq i \leq n} X_i > x\right)$$

$$= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i > x\right)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x)$$ par indépendances des $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(X_i \leq x))$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F(x))$$ car les X_i suivent la même loi que X

$\forall x \in \mathbb{R}, F_{(n,1)}(x) = 1 - (1 - F(x))^n$

Comme précédent, grâce aux propriétés de F, on vérifie que

$F_{(n,1)}$ est continue sur $\mathbb{R}$, C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points,

que $\lim_{x \to +\infty} F_{(n,1)}(x) = 1$ et $\lim_{x \to -\infty} F_{(n,1)}(x) = 0$ et que $F_{(n,1)}$ est

croissante

Ainsi, $X_{(n,1)}$ est une variable à densité et une densité de

$X_{(n,1)}$ s'obtient en dérivant $F_{(n,1)}$ ie :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{(n,1)}(x) = nf(x)\,(1-F(x))^{n-1}$

2) a) Soit $i \in \mathbb{N}^*$. $Y_{i,n}(\Omega) = \{0,1\}$

et $P(Y_{i,n} = 1) = P(X_i \leq x)$

$= F(x)$ car les $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ suivent la même loi que X

Donc $P(Y_{i,n} = 0) = 1 - F(x)$

Ainsi, $Y_{i,n} \hookrightarrow \mathcal{B}(F(x))$

b) si $(X_{(n,k)} \leq x)$ est vérifié alors toutes les variables

$X_{(n,i)}$ pour $i \in [\![1,k-1]\!]$ seront aussi inférieures à x car

elles sont rangées dans l'ordre croissant

ie $\forall i \in [\![1,k]\!]$, $(X_{(n,i)} \leq x)$ est vérifié

Donc parmi les X_i, $i\in[\![1,n]\!]$, il y en a au moins k inférieures à x

or dès qu'une variable X_i, $i\in[\![1,n]\!]$ est $\leq x$ alors

$Y_{i,n}$ prend la valeur 1. Alors $\left[\sum_{k=1}^{n} Y_{i,n} \geq k\right]$ est vérifié.

Donc $[X_{(n,k)} \leq x] \subset \left[\sum_{i=1}^{n} Y_{i,n} \geq k\right]$

Réciproquement,
L'événement $\left[\sum_{i=1}^{n} Y_{i,x} \geq k\right]$ est réalisé que si au moins

k variables X_i $(i \in [\![1,n]\!])$ sont inférieures ou égales à x

En rangeant ses k variables dans l'ordre croissant, on aura

bien $[X_{(n,k)} \leq x]$

D'où $\underline{[X_{(n,k)} \leq x] \supset \left[\sum_{i=1}^{n} Y_{i,x} \geq k\right]}$

Au final, $\underline{[X_{(n,k)} \leq x] = \left[\sum_{i=1}^{n} Y_{i,x} \geq k\right]}$

c) Par égalité des événements, $P(X_{(n,k)} \leq x) = P\left(\sum_{i=1}^{n} Y_{i,x} \geq k\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}$

or les $Y_{i,x}$, $i \in [\![1,n]\!]$ suivent toutes une loi $\mathcal{B}(F(x))$

et elles sont indépendantes car les $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ le sont

Donc $\sum_{i=1}^{n} Y_{i,x} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, F(x))$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $P\left(\sum_{i=1}^{n} Y_{i,x} \geq k\right) = \sum_{\ell=k}^{n} \binom{n}{\ell} F(x)^{\ell} (1-F(x))^{n-\ell}$

ie $\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ F_{(n,k)}(x) = \sum_{\ell=k}^{n} \binom{n}{\ell} F(x)^{\ell} (1-F(x))^{n-\ell}}$

3)a) La fonction $b_{n,\ell}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit

de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ $\left(z \mapsto \binom{n}{\ell} z^{\ell}\right.$ et $\left.z \mapsto (1-z)^{n-\ell}\right)$

Copie anonyme - n°anonymat : 203943

Code épreuve : 283

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths 2 approfondies ESCP BS / HEC Paris

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Et donc $\forall z \in \mathbb{R}$, $b'_{n,\ell}(z) = \binom{n}{\ell}\left[\ell z^{\ell-1}(1-z)^{n-\ell} - (n-\ell) z^{\ell}(1-z)^{n-\ell-1}\right]$

$$= \ell\binom{n}{\ell} z^{\ell-1}(1-z)^{n-\ell} - (n-\ell)\binom{n}{\ell} z^{\ell}(1-z)^{n-\ell-1}$$

par la formule du pion

$$= n\binom{n-1}{\ell-1} z^{\ell-1}(1-z)^{n-\ell} - n\binom{n-1}{n-\ell-1} z^{\ell}(1-z)^{n-\ell-1}$$

$$= n\left(b_{n-1,\ell-1}(z) - b_{n-1,\ell}(z)\right)$$

car $\binom{n-1}{n-\ell-1} = \binom{n-1}{\ell}$

b) $a_{n,k}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ $(z \mapsto b_{n,\ell}(z))$

et $\forall z \in \mathbb{R}$, $a_{n,k}'(z) = \sum_{\ell=k}^{n} b_{n,\ell}'(z)$

$$= \sum_{\ell=k}^{n} n\left(b_{n-1,\ell-1}(z) - b_{n-1,\ell}(z)\right)$$

par téléscopage $\rightarrow$ $= n\left(b_{n-1,k-1}(z) - \underbrace{b_{n-1,n}(z)}_{0 \text{ d'après l'énoncé}}\right)$

$\forall z \in \mathbb{R}$, $a_{n,k}'(z) = n\, b_{n-1,k-1}(z)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c) Ce que l'on vient de trouver est valable pour tout $z \in \mathbb{R}$

car $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) \in [0,1] \subset \mathbb{R}$

Donc on peut remplacer z par $F(x)$.

Avant, notons que $X_{(n,k)}$ est bien une variable aléatoire

réelle à densité :

Comme F est continue sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto F(x)^{\ell}$ l'est aussi $\forall \ell \in [\![0,n]\!]$

et $x \mapsto (1-F(x))^{n-\ell}$ aussi

Et on a aussi donc $F_{(n,k)}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ par

somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} F_{(n,k)}(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} F_{(n,k)}(x) = 0$

et $F_{(n,k)}$ est croissante de

~~Et~~ Comme F est C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini

de points, il en est de même pour $F_{(n,k)}$

Donc $X_{(n,k)}$ est bien une variable aléatoire réelle à densité.

Et, comme nous l'avons dit plus haut, on peut utiliser

le résultat de la question 3)b) en posant $z = F(x)$

Ainsi, une densité de $X_{(n,k)}$ s'obtient en dérivant $F_{(n,k)}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{(n,k)}(x) = n \binom{n-1}{k-1} f(x) F(x)^{k-1} (1 - F(x))^{n-k}$$

(où $f(x)$ apparaît car c'est la dérivée de $F(x)$, alors que la dérivée de z était 1).

4) Supposons que l'événement $\left[\sum_{i=1}^{n} Y_{i,x} \geq \lfloor \alpha n \rfloor \right]$ soit réalisé.

Alors on $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_{i,x} \geq \frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n}$

ie $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_{i,x} - F(x) \geq \frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n} - F(x)$

or $\frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n} \underset{+\infty}{\sim} \alpha$: on a $\lfloor \alpha n \rfloor \leq \alpha n < \lfloor \alpha n \rfloor + 1$

ie $\alpha n - 1 < \lfloor \alpha n \rfloor \leq \alpha n$

d'où $\frac{\alpha n - 1}{n} < \frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n} \leq \frac{\alpha n}{n}$

ie par encadrement, $\lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} = \alpha$

Donc pour n suffisamment grand, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_{i,x} - F(x) \geq \alpha - F(x) > \varepsilon$

Et a fortiori, $\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_{i,x} - F(x) \right| \geq \varepsilon$

Donc $\left[\sum_{i=1}^{n} Y_{i,x} \geq \lfloor \alpha n \rfloor \right] \subset \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_{i,x} - F(x) \right| \geq \varepsilon \right]$

$$f_{(n,\lfloor \alpha n\rfloor)}(x) = P\left(\sum_{i=1}^{n} Y_{i,x} \geq \lfloor \alpha n \rfloor\right) \quad \text{d'après } 2)b)$$

Alors $0 \leq f_{(n,\lfloor \alpha n\rfloor)}(x) \leq P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_{i,x} - F(x)\right| \geq \varepsilon \right)$

car les variables $Y_{i,x}$ sont indépendantes, possède une espérance égale à $F(x)$ et un moment d'ordre 2 (ce sont des variables de Bernoulli)

Donc d'après la loi faible des grands nombres,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_{i,x} - F(x)\right| \geq \varepsilon \right) = 0$$

Alors par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} f_{(n,\lfloor \alpha n\rfloor)}(x) = 0$ (toujours pour le x fixé tq $0 < F(x) < 1$)

b) supposons que l'événement $\left[\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_{i,x} - F(x)\right| < \varepsilon \right]$ soit réalisé. $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

on a a fortiori $-\varepsilon < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_{i,x} - F(x)$

ie $F(x) - \varepsilon < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_{i,x}$

d'où $n(F(x) - \varepsilon) < \sum_{i=1}^{n} Y_{i,x}$

or $F(x) - \varepsilon > \alpha$ donc $\sum_{i=1}^{n} Y_{i,x} > n\alpha$

or $n\alpha \geq \lfloor n\alpha \rfloor$ donc $\left[\sum_{i=1}^{n} Y_{i,x} \geq \lfloor n\alpha \rfloor \right]$ est réalisé.

Copie anonyme - n°anonymat : 203943

Code épreuve : 283	Nombre de pages :	Session : 2024

Épreuve de : Maths 2 approfondies ESCP BS / HEC Paris

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_{i,n} - F(x) \right| < \varepsilon \right] \subset \left[\sum_{i=1}^{n} Y_{i,n} \geq \lfloor \alpha n \rfloor \right]$

Ainsi, on $P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_{i,n} - F(x) \right| < \varepsilon \right) \leq F_{(n, \lfloor n\alpha \rfloor)}(x) \leq 1$

or on a vu que $\lim_{n \to +\infty} P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_{i,n} - F(x) \right| \geq \varepsilon \right) = 0$

D'où $\lim_{n \to +\infty} P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_{i,n} - F(x) \right| < \varepsilon \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_{i,n} - F(x) \right| \geq \varepsilon \right) \right)$

$= 1$

Puis par encadrement,

$\lim_{n \to +\infty} F_{(n, \lfloor n\alpha \rfloor)} = 1$

5/a) La fonction F admet pour dérivée la fonction f car c'est la densité de X (dont la fonction répartition est F)

Comme f est continue sur I et strictement croissante sur I,

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

alors F réalise une bijection de I sur $]0,1[$ (car $F(x) \subset]0,1[$ si $f(x) > 0$ sur I)

on a bien $F(x) \neq 1$ et $F(x) \neq 0$

b) La fonction de répartition de la variable aléatoire certaine égale à $F^{-1}(\alpha)$ est : $F_{F^{-1}(\alpha)}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geq F^{-1}(\alpha) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$\alpha \in]0,1[$ donc $F^{-1}(\alpha) \neq 0$ donc l'ensemble $C_{F^{-1}(\alpha)}$ des points de continuité de la fonction de répartition de $F^{-1}(\alpha)$ est $\mathbb{R} \setminus \{F^{-1}(\alpha)\}$

* Soit $x > F^{-1}(\alpha)$ alors $F(x) > \alpha$
car F est strictement croissante sur I

D'où $\alpha \in]0, F(x)[$ et alors d'après la question précédente,

$\lim\limits_{n \to +\infty} F_{(n,Ln\alpha)}(x) = 1 = F_{F^{-1}(\alpha)}(x)$

* Si $x < F^{-1}(\alpha)$ alors $F(x) < \alpha$ car F est strictement croissante sur I

D'où $\alpha \in]F(x), 1[$

Et d'après la question h)a), dans ces conditions,

$$\lim_{n\to+\infty} F_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)}(x) = 0 = F_{F^{-1}(\alpha)}$$

Ainsi, $\forall x \in C_{F^{-1}(\alpha)}, \lim_{n\to+\infty} F_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)}(x) = F_{F^{-1}(\alpha)}$

alors $(X_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y = F^{-1}(\alpha)$

c) La convergence en loi vers une variable aléatoire certaine égale à $F^{-1}(\alpha)$ entraîne la convergence en probabilité vers cette même variable aléatoire

alors $X_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)} \xrightarrow{P} F^{-1}(\alpha)$

Montrons le :

Montrons que $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} P(|X_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)} - F^{-1}(\alpha)| \geq \varepsilon) = 0$

Soit $\varepsilon > 0$

$$P(|X_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)} - F^{-1}(\alpha)| \geq \varepsilon) = P(-\varepsilon \leq X_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)} - F^{-1}(\alpha) \leq \varepsilon)$$

$$= P(F^{-1}(\alpha) - \varepsilon \leq X_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)} \leq \varepsilon + F^{-1}(\alpha))$$

$$= F_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)}(\varepsilon + F^{-1}(\alpha)) - F_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)}(F^{-1}(\alpha) - \varepsilon)$$

$$\lim_{n\to+\infty} F_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)}(\varepsilon + F^{-1}(\alpha)) = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} F_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)}(F^{-1}(\alpha) - \varepsilon) = 1$$

D'où $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \to +\infty} P\left(\left| X_{(n,\lceil n\alpha\rceil)} - F^{-1}(\alpha) \right| \geq \varepsilon \right) = 0$

D'où $X_{(n,\lceil n\alpha\rceil)} \xrightarrow{P} F^{-1}(\alpha)$

6) ~~def tri(T):~~
~~s = len(T)~~
~~for k in range(len(T)):~~
~~if T[k+1] > T[k] :~~
~~T[k+1], T[k] = T[k], T[k+1]~~

```
def tri(T):
    s = len(T)
    for k in range(s):
        U = T[:k+1]
        if T[k] > max(U) :
            T[k], max(U) = max(U), T[k]
    return T
```

7) ~~def ech(n):~~

~~def X(n,k) :~~
~~res = ech(n)~~
~~Y = tri(ech(n))~~

```
def ech(n):

def X(n,k):
    res = ech(n)
    Y = tri(res)
    return Y[k-1]
```

b) Les points représentent les réalisations des variables aléatoires $X_{(n,\lceil k\alpha\rceil)}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$

Copie anonyme - n°anonymat : 203943

Code épreuve : 283

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths 2 approfondies ESCP BS / HEC Paris

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

c) Les X_i semblent suivre une loi uniforme sur $[2,6]$

d) /

Partie II :

8) a) * Pour $k=1$, $S_1 = T_1$ et $T_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(n\lambda)$.

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f_{T_1}(x) = \begin{cases} n\lambda e^{-\lambda n x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Donc $f_{S_1}(x) = \begin{cases} n\lambda e^{-\lambda n x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Donc la propriété est vérifiée au rang 1

* Supposons que pour k fixé $\in [\![1, n-1]\!]$, S_k suive la loi de densité

$g_{n,k}$ donnée dans l'énoncé

Mq S_{k+1} suit la loi densité $g_{n,k+1}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$S_{n+1} = T_1 + \dots + T_n + T_{n+1} = S_n + T_{n+1}$

Les $T_1, \dots T_n$ sont indépendants donc par le lemme des coalitions,

Sn et T_{n+1} sont indépendants $(k \in [\![1, n-1]\!])$

Si la formule $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} g_{n,k}(t) f_{T_{n+1}}(x-t)\, dt$

définie une fonction continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en

un nombre fini de points, alors $S_{n+1} = S_n + T_n$ est une

variable à densité et h en est une d'après le théorème de convolution

car $g_{n,k}$ est bornée sur $]0;+\infty[$ (cela se remarque avec sa formule)

Donc $h : x \int_{-\infty}^{+\infty} g_{n,k}(t) f_{T_{n+1}}(x-t)\, dt$ définit bien une fonction

continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

$g_{n,k}(t) > 0 \iff t \in]0;+\infty[$

$f_{T_{n+1}}(x-t) > 0 \iff x-t \in]0;+\infty[$ ie $t \in]0;x[$

Alors $h(x) = \int_0^x g_{n,k}(t) f_{T_{n+1}}(x-t)\, dt$ si $x > 0$, 0 sinon

$$= \int_0^x n \binom{n-1}{k-1} \lambda e^{-\lambda(n-k+1)t} (1-e^{-\lambda t})^{k-1} \lambda(n-k) e^{-(n-k)\lambda(x-t)}\, dt$$

$\forall x > 0,$

$$h(x) = \lambda^2 n(n-k)\binom{n-1}{k-1}\int_0^x e^{-\lambda(n-k+1)-(n-k)\lambda x+(n-k)\lambda t}\,(1-e^{-\lambda t})^{k-1}\,dt$$

$$= \lambda^2 n(n-k)\binom{n-1}{k-1} e^{-(n-k)x}\int_0^x e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{k-1}\,dt$$

$$= \lambda^2 n(n-k)\binom{n-1}{k-1} e^{-(n-k)x}\left[\frac{1}{\lambda k}(1-e^{-\lambda t})^k\right]_0^x$$

$$= \lambda^2 n(n-k)\binom{n-1}{k-1} e^{-(n-k)x}\times\frac{1}{\lambda k}(1-e^{-\lambda x})^k$$

$$= \lambda\,(n-k)\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} e^{-(n-k)x}(1-e^{-\lambda x})^k$$

$$= \lambda\,(n-k)\binom{n}{k} e^{-(n-k)x}(1-e^{-\lambda x})^k$$

$$= \lambda\, n\binom{n-1}{k} e^{-(n-k)x}(1-e^{-\lambda x})^k$$

$$= g_{n,k+1}(x)$$

Ainsi, on a montré que la densité de S_{k+1} est $g_{n,k+1}$

Donc par principe de récurrence, $\forall\, k \in [\![1,n]\!]$, S_k suit la loi de densité $g_{n,k}$

b) On a montré dans la partie I que

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{(n,k)}(x) = n\binom{n-1}{k-1} f(x)\, F(x)^{k-1}(1-F(x))^{n-k}$

Si les X_i suivent toutes la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, X aussi

et donc $X_{(n,k)}(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$

$\cancel{(1-e^{-\lambda x})^\ell\,(e^{-\lambda x})^{n-\ell}}$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_{(n,k)}(x) = n\binom{n-1}{k-1}\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{k-1}(e^{-\lambda x})^{n-k}$

$$= \lambda n \binom{n-1}{k-1} e^{-\lambda(n-k+1)x}(1-e^{-\lambda x})^{k-1}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_{(n,k)}(x) = g_{n,k}(x)$

Et $\forall x \leq 0$, $f_{(n,k)}(x) = 0 = g_{n,k}(x)$

Ainsi, comme $X_{(n,k)}$ et S_n ont la même densité, elles

suivent la même loi

~~9) $X_{(n,k)}$ admet une espérance $\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} t\, g_{n,k}(t)\,dt$ converge (absolument)~~

~~$t\, g_{n,k}(t) = n\lambda\binom{n-1}{k-1} t\, e^{-\lambda(n-k+1)t}(1-e^{-\lambda t})^{k-1}$~~

~~cette fonction est continue et positive sur $[0;+\infty[$~~

~~Donc l'intégrale est impropre en $+\infty$~~

~~or $\lim_{t\to+\infty} t^2 \times t\, g_{n,k}(t) = 0$ par croissance comparée~~

~~Donc $t\, g_{n,k}(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge par critère de Riemann~~

~~Donc par comparaison d'intégrales de fonctions positives,~~

~~$\int_1^{+\infty} t\, g_{n,k}(t)\,dt$ converge et donc $\int_0^{+\infty} t\, g_{n,k}(t)\,dt$ converge (absolument)~~

~~Donc $X_{(n,k)}$ admet une espérance.~~

~~$E(X_{(n,k)}) = \int_0^{+\infty} n\binom{n-1}{k-1}\lambda t\, e^{-\lambda(n-k+1)t}(1-e^{-\lambda t})^{k-1}\,dt$~~

Copie anonyme - n°anonymat : 203943

S_n suit la même loi que $X_{(n,n)}$

Donc elles ont la même espérance et la même variance

car $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $E(T_i)$ existe et vaut $\frac{1}{\lambda(n-i+1)}$

Et $S_n = T_1 + \dots + T_n$

Donc $E(S_n)$ existe et par linéarité, $E(S_n) = E(X_{(n,n)}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n-i+1)}$

De même toutes les variables T_i admettent une variance

qui vaut $\frac{1}{\lambda^2(n-i+1)^2}$ car $T_i \hookrightarrow \mathcal{E}((n-i+1)\lambda)$

Donc $V(S_n)$ existe

D'où par indépendance des $T_1, \dots, T_n$,

$V(S_n) = \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n-i+1)^2} = V(X_{(n,n)})$

soit $j \geq 1$

10)a) $x \geq j$ donc $\frac{1}{j} \geq \frac{1}{x}$ ie $\frac{1}{j} - \frac{1}{x} \geq 0 \ \forall x \in [j;j+1]$

$f : [j;j+1] \to \mathbb{R}$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{j} - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$ est dérivable sur $[j;j+1]$

et $f'(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} \geq 0 \ \forall x \in [j;j+1]$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc f est croissante sur $[j, j+1]$

donc $\forall x \in [j, j+1]$, $f(x) \leq f(j+1)$

$$\frac{1}{j} - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \leq \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} - \frac{2}{(j+1)^2} \leq 0.$$

Alors $\forall x \in [j ; j+1]$, $\frac{1}{j} - \frac{1}{x} \leq \frac{2}{x^2}$

Alors $\forall j \geq 1$ et $\forall x \in [j, j+1]$,

$$0 \leq \frac{1}{j} - \frac{1}{x} \leq \frac{2}{x^2}$$

b)

c) Si $\alpha \in [0,1]$, on a $1 \leq \lfloor \alpha n \rfloor \leq n$

D'après la question précédente,

$$\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{n+1}{n - \lfloor n\alpha \rfloor + 1}\right) \leq E(X_{(n, \lfloor \alpha n \rfloor)}) \leq \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{n+1}{n - \lfloor n\alpha \rfloor + 1}\right) + \frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{n - \lfloor n\alpha \rfloor + 1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{n - \lfloor n\alpha \rfloor + 1}{n+1}\right) \leq E(X_{(n, \lfloor n\alpha \rfloor)}) \leq -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{n - \lfloor n\alpha \rfloor + 1}{n+1}\right) + \frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{n - \lfloor n\alpha \rfloor + 1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{n - \lfloor n\alpha \rfloor + 1}{n+1}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n+1}\right) = 1 - \alpha$ (cf démo faite à la question 4)a))

Puis par continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}_+^*$, $(1-\alpha \in \mathbb{R}_+^*)$ $(]0,1[)$

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{n-\lfloor n\alpha\rfloor+1}{n+1}\right) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)$$

$$\text{et } \frac{1}{n-\lfloor n\alpha\rfloor+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-(n-\lfloor n\alpha\rfloor+1)}{(n-\lfloor n\alpha\rfloor+1)(n+1)}$$

$$= \frac{\lfloor n\alpha\rfloor}{(n-\lfloor n\alpha\rfloor+1)(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

D'où par encadrement,

$$\forall \alpha \in]0;1[, \lim_{n\to+\infty} E\left(X_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)}\right) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)$$

11) /

12) a) D'après l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire $\left(X_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)} + \frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)\right)^2$,

$$\forall \varepsilon > 0, P\left(\left(X_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)} + \frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)\right)^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{E\left(\left(X_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)} + \frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)\right)^2\right)}{\varepsilon^2}$$

$$\text{or } P\left(\left(X_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)} + \frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)\right)^2 \geq \varepsilon^2\right) = P\left(\left|X_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)} + \frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)\right| \geq \varepsilon\right)$$

$$\text{D'où } P\left(\left|X_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)} + \frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\left(\left(X_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)} + \frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)\right)^2\right)$$

b) $E\left(\left(X_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)} + \frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)\right)^2\right) = V\left(X_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)} + \frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)\right)$

$+ \left(E\left(X_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)} + \frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)\right)\right)^2$

(d'après Koenig-Huygens)

or $V\left(X_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)} + \frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)\right) = V\left(X_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)}\right)$

et $\left(E\left(X_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)} + \frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)\right)\right)^2 = \left(E\left(X_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)}\right) + \frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)\right)^2$

par linéarité de l'espérance

or $\lim\limits_{n\to+\infty} V\left(X_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)}\right) = 0$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} E\left(X_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)}\right) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)$

D'où, par continuité de la fonction carré,

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(E\left(X_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)} + \frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)\right)\right)^2 = 0$

D'où $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} E\left(\left(X_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)} + \frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)\right)^2\right) = 0}$

D'où par Markov, $\forall \varepsilon > 0$,

$\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|X_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)} + \frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)\right| \geq \varepsilon\right) = 0}$

Donc on peut conclure que $\underline{X_{(n,\lfloor n\alpha\rfloor)} \xrightarrow{P} -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)}$

13) La question 6) en modifiant la fonction echant pour l'adapter aux T_i qui suivent des lois $\mathcal{E}(\lambda)$

14) a)

Partie III

15) On a prouvé à la question 8)b) que $X_{(n,n)}$ et $S_n = T_1 + \dots + T_n$ suivent la même loi si $T_1, \dots, T_n$ suivent les lois $\mathcal{E}((n-i+1)\lambda)$

Ce nouveau théorème permet même d'affirmer que $X_{(n,n)} = S_n$

si l'on pose $S_n = T_{n,1} + \dots + T_{n,n}$

Cela est plus fort que le fait qu'elles suivent la même loi

16) Posons $Y = Z+1$ $\quad Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$

et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \; P(Y=k) = P(Z=k-1) = pq^{k-1}$

donc $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

$E(Y) = \frac{1}{p}$ $\quad V(Y) = \frac{pq + p^2 - 1}{p^2}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Par linéarité de l'espérance,

$$E(Z) = E(Y) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p}$$

$$V(Z) = V(Y) = \frac{pq + p^2 - 1}{p^2}$$

17) Soit $\ell \in \mathbb{N}$. $P(U_n \geq \ell) = P(\min(Z_1, \dots Z_n) \geq \ell)$

$$= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} Z_i \geq \ell\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(Z_i \geq \ell)$$ par indépendance des Z_i

$$= \prod_{i=1}^{n} \sum_{k=\ell}^{+\infty} P(Z_i = k)$$ (la série est convergente

$$= \prod_{i=1}^{n} \sum_{k=\ell}^{+\infty} pq^k$$

car $\forall$ soit $N \geq \ell$ $\sum_{k=\ell}^{N} pq^k = pq^\ell \times \frac{1-q^{N-\ell+1}}{1-q}$

or $q \in]0,1[$ donc $\lim_{N \to +\infty} pq^\ell \times \frac{1-q^{N-\ell+1}}{1-q} = \frac{pq^\ell}{1-q}$

$$= q^\ell$$

D'où $\sum_{k=\ell}^{+\infty} pq^k = q^\ell$

D'où $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $P(U_n \geq \ell) = \prod_{i=1}^{n} q^\ell = q^{\ell n}$

b) Soit $\ell \in \mathbb{N}$ $P(U_n=\ell) = P(U_n \geq \ell) - P(U_n \geq \ell+1)$

$$= q^{\ell n} - q^{n(\ell+1)}$$

$$= q^{\ell n}(1-q^n) = (q^n)^\ell (1-q^n)$$

Donc $\forall \ell \in \mathbb{N}, P(U_n=\ell) = (1-q^n)(q^n)^\ell$

Ainsi, $U_n \hookrightarrow \mathcal{L}(q^n)$

18) $[Z_1 \geq h_1] \cap (Z_2 - Z_1 \geq h_2)] = [(Z_1 \geq h_1) \cap (Z_2 \geq h_2 + Z_1)]$

$$= [(Z_1 \geq h_1) \cap (Z_2 \geq h_2 + h_1)]$$

D'où $P([Z_1 \geq h_1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq h_2]) = P((Z_1 \geq h_1) \cap (Z_2 \geq h_2 + h_1))$

$= P(Z_1 \geq h_1) \times P(Z_2 \geq h_2 + h_1)$
par indépendance de Z_1 et Z_2

$= q^{h_1} \times \frac{1}{1+q} \times q^{h_1+h_2}$
(en utilisant les résultats de $P(U_n \geq \ell)$)

$$= \frac{1}{1+q} q^{2h_1} q^{h_2}$$

19) a) $X_1(\Omega) = \mathbb{R}_+$ donc $\lfloor mX_1 \rfloor(\Omega) = \mathbb{N}$ ie $Z_1(\Omega) = \mathbb{N}$

Il en est de même pour $Z_2(\Omega)$.

Et $\forall h \in \mathbb{N}^*$, $P(Z_1 = h) = P(h-1 < mX_1 \leq h)$

$$= P\left(X_1 \leq \frac{h}{m}\right) - P\left(X_1 \leq \frac{h-1}{m}\right)$$

D'où $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z_1 = k) = 1 - e^{-\frac{\lambda}{m}k} - (1 - e^{-\frac{\lambda}{m}(k-1)})$

$$= e^{-\frac{\lambda}{m}(k-1)} - e^{-\frac{\lambda}{m}k}$$

$$= e^{-\frac{\lambda}{m}k}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}}\right)$$

ceci reste vrai pour $k=0$

Donc $\underline{Z_1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(e^{-\frac{\lambda}{m}}\right)}$ $\left(q = e^{-\frac{\lambda}{m}}\right)$

Il en est de même pour Z_2

b) $[Z_1 \geq k_1 + 1]$ signifie que $[\lfloor mX_1 \rfloor \geq \lfloor mx \rfloor + 1]$

or si $\lfloor mX_1 \rfloor \geq \lfloor mx \rfloor + 1$ alors $mX_1 > mx$

ie $X_1 > x$ car $m \neq 0$

Donc $\underline{[Z_1 \geq k_1 + 1] \subset [X_1 > x]}$

Si $X_1 > x$, $\underset{\text{car } m > 0}{mX_1 > mX}$ d'où $\lfloor mX_1 \rfloor \geq \lfloor mx \rfloor$

ie $Z_1 \geq k_1$

Donc $\underline{[X_1 > x] \subset [Z_1 \geq k_1]}$

$Z_2 - Z_1 \geq k_2 + 2$ signifie que $\lfloor mX_2 \rfloor - \lfloor mX_1 \rfloor \geq \lfloor my \rfloor + 2$

or d'après les propriétés de la partie entière,

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+_,$ $\lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \leq x - y \leq \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor + 2$

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : | Session : 2024

Épreuve de : Maths approfondies ESCP BS / HEC Paris

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

D'où $\lfloor mx_2 \rfloor - \lfloor mx_1 \rfloor \geq \lfloor my \rfloor + 2 \Rightarrow x_2 - x_1 > y$

donc $[Z_2 - Z_1 \geq h_2 + 2] \subset [X_2 - X_1 > y]$

Si $[X_2 - X_1 > y]$, alors $mX_2 - mX_1 > my$

ie $\lfloor mX_2 \rfloor - \lfloor mX_1 \rfloor \geq \lfloor mX_2 - mX_1 \rfloor \geq \underbrace{\lfloor my \rfloor}_{= h_2}$

D'où $[X_2 - X_1 > y] \subset [Z_2 - Z_1 \geq h_2]$

c) On peut déduire l'encadrement suivant :

$$[Z_1 \geq h_1 + 1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq h_2 + 2] \subset [X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y] \subset [Z_1 \geq h_1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq h_2]$$

Par passage aux probabilités, on a à gauche :

$$P([Z_1 \geq h_1 + 1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq h_2 + 2]) \leq P([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y])$$

D'où en utilisant la question 18 avec $h_1 + 1$ et $h_2 + 2$ on obtient

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

ona $P\left([Z_1 \geq h_1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq h_2]\right) = \frac{1}{1+e^{-\lambda/n}} e^{-2\lambda \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}} e^{-\lambda \frac{\lfloor ny \rfloor + 2}{n}}$

$\leq P([X_1 > x] \cap (X_2 - X_1 > y])$

en ayant remplacé h_1 et h_2 par leur valeurs respectives

Ja même technique du côté droit

donc $P\left([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]\right) \leq \frac{1}{1+e^{-\lambda/n}} e^{-2\lambda \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}} e^{-\lambda \frac{\lfloor ny \rfloor}{n}}$

Au final on a bien :

$$\frac{1}{1+e^{-\lambda/n}} e^{-2\lambda \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}} e^{-\lambda \frac{\lfloor ny \rfloor + 2}{n}} \leq P\left([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]\right) \leq \frac{1}{1+e^{-\lambda/n}} e^{-2\lambda \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}} e^{-\lambda \frac{\lfloor ny \rfloor}{n}}$$

r

d) Cet encadrement est vrai $\forall n \in \mathbb{N}$ donc on va pouvoir faire tendre n vers $+\infty$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1+e^{-\lambda/n}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} = x \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor ny \rfloor + 2}{n} = y$$

Alors par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1+e^{-\lambda/n}} e^{-2\lambda \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}} e^{-\lambda \frac{\lfloor ny \rfloor + 2}{n}} = \frac{1}{2} e^{-2\lambda x} e^{-\lambda y}$$

Un raisonnement analogue sur le membre de droite nous permet de

montrer que : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1+e^{-\lambda/n}} e^{-2\lambda \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}} e^{-\lambda \frac{\lfloor ny \rfloor}{n}} = \frac{1}{2} e^{-2\lambda x} e^{-\lambda y}$

Donc par encadrement,

$$\lim_{n \to +\infty} P([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]) = \frac{1}{2} e^{-2\lambda x} e^{-\lambda y}$$

Mais cette expression ne dépend pas de n

d'où $P([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]) = \frac{1}{2} e^{-2\lambda x} e^{-\lambda y}$

20) $P(X_1 = X_2) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((X_1 = k) \cap (X_2 = k))$

$= 0$ car les variables à densité ne prennent pas de valeurs singulières

d'où $P(X_1 = X_2) = 0$

b) $[X_{(1)} > x] \cap [X_{(2)} - X_{(1)} > y] = [X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]$
$\cup [X_2 > x] \cap [X_1 - X_2 > y]$

D'où par incompatibilité,

$$P([X_{(1)} > x] \cap [X_{(2)} - X_{(1)} > y]) = P([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]) + P([X_2 > x] \cap [X_1 - X_2 > y])$$

Mais les variables X_1 et X_2 jouent un rôle symétrique et suivent la même loi donc

$$P([X_{(1)} > x] \cap [X_{(2)} - X_{(1)} > y]) = 2 P([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y])$$

c) $P(X_{(1)} > x)\, P(X_{(2)} - X_{(1)} > y) =$

$2P([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]) = e^{-2\lambda x} e^{-\lambda y}$

$P(X_{(1)} > x) = e^{-\lambda x}$

$P(X_{(2)} - X_{(1)} > y) = e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}$

D'où $P(X_{(1)}$