

Copie anonyme - n°anonymat : 203943

GG-00023
203943
Mat Appro



Code épreuve : 282

Nombre de pages : 26

Session : 2024

Épreuve de : Maths approfondies ESSEC / HEC Paris

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I :

$$1) \text{ Mg } P^t P = I_n$$

Soit σ la permutation associée à P

$$\forall (ij) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, P_{ij} = \delta_{i, \sigma(j)}$$

$$\text{ie } \forall (ij) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, {}^t P_{ij} = \delta_{\sigma(j), i}$$

$$\text{Ainsi, } \forall (ij) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (P^t P)_{ij} = \sum_{h=1}^n \delta_{i, \sigma(h)} \delta_{\sigma(h), j}$$

$$\text{or on sait que } \delta_{in} = \begin{cases} 1 & n=i \\ 0 & n \neq i \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } \forall (ij) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (P^t P)_{ij} = \begin{cases} \sum_{h=1}^n \delta_{i, \sigma(h)} \delta_{\sigma(h), j} & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

car $\delta_{i, \sigma(h)} \delta_{\sigma(h), j} = 0$
si $i \neq j$
 $\forall h \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$(P^t P)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{(quand } \sigma(h) = i \text{)} \\ & \text{non } \delta_{i, \sigma(h)} \delta_{\sigma(h), j} = 0 \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Ainsi, on reconnaît que $P^t P = I_n$ donc P est orthogonale

$${}^t P_{ij} = \delta_{\sigma(i), j}$$

car σ est une bijection donc il existe σ^{-1} la bijection réciproque

Et on peut écrire, ${}^t P_{ij} = \delta_{i, \sigma^{-1}(j)} \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$

Comme σ^{-1} est une bijection, on a alors que ${}^t P$ est aussi une matrice de permutation.

2) $\Rightarrow$ Supposons que Q soit une matrice de Hadamard

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, Q_{ij} = E_{ij} \text{ or } \forall (i, j), E_{ij} \in \{-1, 1\}$$

Notons $c_1, \dots, c_n$ les vecteurs colonnes de Q et $l_1, \dots, l_n$ les vecteurs lignes.

En transposant Q , ${}^t Q$ a pour colonnes $l_1, \dots, l_n$ et pour lignes $c_1, \dots, c_n$ (l'inverse de Q)

Donc on a : ${}^t Q Q =$

$$\begin{pmatrix} \|c_1\|^2 & \langle c_1, c_2 \rangle & \dots & \dots & \langle c_1, c_n \rangle \\ \langle c_2, c_1 \rangle & \|c_2\|^2 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \langle c_n, c_1 \rangle & \dots & \dots & \dots & \langle c_n, c_n \rangle \|c_n\|^2 \end{pmatrix}$$

or les vecteurs colonnes de Q sont deux à deux orthogonaux

donc $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j, \langle c_i, c_j \rangle = 0$

De plus comme tous les coefficients de Q valent 1 ou -1, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,
 $\|c_i\|^2 = n$

finalment, on a bien ${}^tQQ = nI_n$

on a aussi de manière évidente $\forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, Q_{ij}^2 = 1$

car tous les coefficients de Q valent 1 ou -1

$\Leftarrow$ Supposons que ${}^tQQ = nI_n$ et que $\forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, Q_{ij}^2 = 1$

Montrons que Q est une matrice de Hadamard.

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, Q_{ij}^2 = 1 \Rightarrow \forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket, Q_{ij} = 1 \text{ ou } Q_{ij} = -1$$

Si l'on note $q_1, \dots, q_n$ les vecteurs colonnes de Q ,

$$\text{on a que } {}^tQQ = \begin{pmatrix} \|q_1\|^2 & \langle q_1, q_2 \rangle & \dots & \langle q_1, q_n \rangle \\ \langle q_2, q_1 \rangle & \ddots & & \langle q_2, q_n \rangle \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \langle q_n, q_1 \rangle & \dots & \dots & \|q_n\|^2 \end{pmatrix}$$

Puis comme ${}^tQQ = nI_n$, par identification, il vient que

$\forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, i \neq j, \langle q_i, q_j \rangle = 0$ ce qui prouve que
les vecteurs colonnes de Q sont deux à deux orthogonaux

Ainsi, Q est bien une matrice de Hadamard

Nec finalment Q est une matrice de Hadamard $\Leftrightarrow {}^tQQ = I_n$
et $\forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, Q_{ij}^2 = 1$

3) Comme H est une matrice de Hadamard, H a comme tous ses coefficients qui valent ± 1 . donc $\forall (i,j) \in [1,n]^2$, $H_{ij}^2 = 1$

On sait également que $H^t H = nI_n$ car H est une matrice de Hadamard

De plus, les ^{vecteurs} colonnes de H sont deux à deux orthogonaux
donc ces vecteurs colonnes forment une famille libre

Donc $\text{rg} H = n$ et donc H est inversible d'inverse H^{-1}

Ainsi, $H^t H = nI_n \Rightarrow H^t H H = nH$
 $\Rightarrow \underline{H^t H} = nI_n$ (en multipliant par H^{-1} à droite)

Ainsi, H vérifie les hypothèses de la question 2

Et donc H est une matrice de Hadamard

4) Soit σ la bijection de $[1,n]$ dans $[1,n]$ associée à P .

* Mq PH est une matrice de Hadamard.

$$\begin{aligned} \forall (i,j) \in [1,n]^2, \quad PH_{ij} &= \sum_{k=1}^n \delta_{i\sigma(k)} E_{kj} \quad \text{où} \quad E_{kj} \in \{-1, 1\} \quad \forall (k,j) \in [1,n]^2 \\ &\quad \text{(coefficient de } H) \\ &= \cancel{\delta_{i\sigma(k)}} \cancel{E_{kj}} \\ &= \delta_{ii} E_{\sigma^{-1}(i)j} \\ &= E_{\sigma^{-1}(i)j} = 1 \text{ ou } -1 \end{aligned}$$

Ainsi de manière évidente, $\forall (i,j) \in [1,n]^2$, $PH_{ij}^2 = 1$

Copie anonyme - n°anonymat : 203943

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 282

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths approfondies ESSEC / HEC Paris

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

De plus, ${}^t(PH)PH = {}^tH{}^tPPH$
 $= {}^tHH$ (car ${}^tPP = I_n$)
 $= nI_n$ car P est orthogonale cf q1)

Plus d'après la question 2, PH est une matrice de Hadamard

* De la même manière, on note que $\forall (i,j) \in \llbracket n \rrbracket^2$, $HP_{ij}^2 = 1$

et ${}^t(HP)HP = {}^tP{}^tHHP$
 $= n{}^tPP$ (car ${}^tHH = nI_n$ car H est une matrice de Hadamard)
 $= nI_n$

Donc HP est aussi une matrice de Hadamard

* Soit $\forall (i,j) \in \llbracket n \rrbracket^2$, $D_{ij} = E'_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \text{ ou } -1 \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

$\forall (i,j) \in \llbracket n \rrbracket^2$, $DH_{ij} = \sum_{k=1}^n E'_{ik} E_{kj}$

$= E'_{ii} E_{ij}$
 $= 1 \omega - 1$

Donc $\forall (i,j) \in \llbracket n \rrbracket^2$, $DH_{ij}^2 = 1$

De plus, ${}^t(DH)DH = {}^tH{}^tDDH$ car $D = \text{diag}(E'_{11}, \dots, E'_{nn})$
 où $E'_{ii} = 1 \omega - 1$

donc à la manière évidente, ${}^tDD = I_n$

$$\text{D'où } {}^t(DH)DH = {}^tHH \\ = \underline{nIn}$$

Ainsi, DH est en matrice de Hadamard

* Une démonstration analogue permet de conclure pour HD.

5) Si on construit une matrice diagonale D telle que les coefficients diagonaux de D soit exactement les mêmes que ceux de la première ligne de H, alors DH HD sera en matrice diagonale de première ligne (1...1).

$$\text{En effet : si } \forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, H_{ij} = E_{ij} \text{ où } E_{ij} = \begin{cases} 1 \\ \alpha \\ -1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \underline{D = \text{diag}(E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n})}$$

$$\forall j \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, HD_{ij} = \sum_{k=1}^n E_{1k} D_{kj} = E_{1j} D_{jj} \\ = E_{1j} E_{1j} \\ \neq // i,j \quad \underline{= 1}$$

Donc il existe une matrice de Hadamard de taille $n \times n$ (car $HD \in M_n(\mathbb{R})$) tq la première ligne soit (1...1).

6)

7) soit $(i, m) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tq $i \neq m$

$$\sum_{k=1}^n (s_{ik} + 1)(s_{mk} + 1) = \sum_{k=1}^n (s_{ik}s_{mk} + s_{ik} + s_{mk} + 1)$$

$$= \sum_{k=1}^n s_{ik}s_{mk} + \sum_{k=1}^n s_{ik} + \sum_{k=1}^n s_{mk} + n$$

$$\text{car } \sum_{k=1}^n s_{ik}s_{mk} = 0 \text{ car } \sum_{k=1}^n s_{ik}s_{mk} = \langle l_i, l_m \rangle_{\text{mk}}$$

car l_i et l_m sont deux vecteurs orthogonaux (ce sont des colonnes de H qui est une matrice de Hadamard)

$$\text{Et } \sum_{k=1}^n s_{ik} = \sum_{k=1}^n s_{mk}s_{ik} = \sum_{k=1}^n s_{mk}s_{ik} = \langle l_1, l_i \rangle = \langle l_1, l_m \rangle = 0$$

pour la même raison

Donc $\forall (i, m) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq m$ $\sum_{k=1}^n (s_{ik} + 1)(s_{mk} + 1) = n$

8)

9) Soit $n \geq 2$

on a vu à la question 4 que si H est une matrice de Hadamard et P une matrice de permutation, alors PH et HP sont aussi des matrices de Hadamard.

Soit σ une bijection associée à P et σ^{-1} sa bijection réciproque on a $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $PH_{ij} = \sum_{k=1}^n P_{ik} H_{kj}$

$$= \sum_{k=1}^n \delta_{i\sigma(k)} H_{kj}$$

$$= \delta_{i\sigma^{-1}(j)} H_{\sigma^{-1}(j)j}$$

$$= H_{\sigma^{-1}(j)j}$$

Ainsi, il s'agit de trouver la bonne bijection σ pour faire en sorte que les 3 premières lignes de PH ressemblent à ce que nous demande l'énoncé.

Si on prend H construite avec 5 dans la question 7 et

quelque $\sigma: \{1, n\} \rightarrow \{1, n\}$
 $i \mapsto i$

alors $\forall j \in \{1, n\}, \quad PH_{1j} = H_{1j} = 1$

Pour les lignes 2 et 3, on peut choisir de multiplier par des matrices diagonales comportant des 1 sur toutes la diagonale sauf en -1 à la 2^{ème} ligne (puis en -1 sur la troisième ligne pour la suivante)

Come la multiplication par une telle matrice D et D' se charge donc une matrice de Hadamard, la matrice obtenue sera aussi de Hadamard avec les conditions vérifiées

10) Si ces quatre blocs n'avaient pas le même nombre de colonnes, cette matrice ne remplissant plus les conditions d'avoir ses vecteurs colonnes deux à deux orthogonaux. Donc nécessairement, les quatre blocs contiennent le même nombre de colonnes.

Ainsi, sachant que la taille de la matrice est n et qu'on a réussi à diviser ses colonnes en 4 blocs comportant le même nombre de colonnes que l'on note k ($k \neq 0$),

on a $n = 4 \times k$ i.e n est nécessairement divisible par 4.

Copie anonyme - n°anonymat : 203943

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 282

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths approfondies ESSEC / HEC Paris

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

11) Supposons que A et B soient des matrices de Hadamard.

Comme A et B sont des matrices de Hadamard,

$$\begin{aligned} \forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, \quad [A_{ij} B]_{he} &= B_{he} \quad \omega - B_{he} \\ \forall (h,e) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2 \\ &= 1 \text{ ou } -1 \end{aligned}$$

Ainsi, il faut que tous les coefficients des blocs $A_{ij} B$
 $\forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2$ soit égaux à 1 ou -1

Ainsi, $\forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, \quad (A \otimes B)_{ij}^2 = 1$
vecteurs

Mais sachant que les vecteurs de $A \otimes B$ sont deux à deux orthogonaux

Soit $c_1, \dots, c_n$ les vecteurs colonnes de $A \otimes B$

Soit $(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, \quad i \neq j$

$$\langle c_i, c_j \rangle = \sum_{h=1}^{kn} \sum_{e=1}^n \left(\sum_{s=1}^n A_{e,i} B_{e,s} \right)$$

$= 0$ car A et B sont des matrices de Hadamard

Donc $A \otimes B$ est une matrice de Hadamard.

12) /

```

13) import numpy as np
def test_hadamard(M):
    n, p = np.shape(M)
    if n != p:
        return -2
    else:
        for i in range(0, n):
            for j in range(0, p):
                if M[i,j]**2 != 1:
                    return -1
            for k in range(0, p):
                if np.dot(M[i,j], M[i,k]) != 0:
                    return 0
        return 1

```

```

14) a) import numpy.random as rd
def rand_hadamard(m, Nmax):
    n = 4 * m
    for test in range(0, Nmax):
        matpm = np.ones((n,n), dtype=int)
        for i in range(1, n):
            nb_un = 0
            j = 0
            while 2 * nb_un < n and -2 * nb_un < n:
                val = rd.randint(0,2)
                nb_un += 1
                matpm[i,j] = 2 * val - 1
            j = j + 1

```

```

if (2 * nb_vn == n) :
    for k in range(1, n):
        mat_pnm[i, k] = -1
if (knb - knbward(mat_pnm) == 1) :
    return mat_pnm
return np.zeros((n, n), dtype = int)

```

Partie II :

15) soit $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^n p_n x_n y_n = \sum_{n=1}^n p_n y_n x_n = \langle y, x \rangle$$

Donc l'application est symétrique

soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle \lambda x + y, z \rangle = \sum_{n=1}^n p_n (\lambda x_n + y_n) z_n = \lambda \sum_{n=1}^n p_n x_n z_n + \sum_{n=1}^n p_n y_n z_n = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

Donc l'application est linéaire (à gauche par symétrie aussi)

soit $x \in \mathbb{R}^n, \langle x, x \rangle = \sum_{n=1}^n p_n x_n^2 \geq 0$ car $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_n$ est une probabilité donc $p_n \geq 0$

Donc l'application est positive

soit $x \in \mathbb{R}^n, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^n p_n x_n^2 = 0$

$\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_n x_n^2 = 0$ (car c'est une somme de termes positifs égale à zéro)

car $\forall A \subset \Omega$ non vide, $P(A) \neq 0$

Donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_i = P(\{w_i\}) \neq 0$ car $\{w_i\} \subset \Omega$ non vide

Donc $\langle n, n \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall h \in \mathbb{N}^+, x_h^2 = 0$

$\Leftrightarrow \forall h \in \mathbb{N}^+, x_h = 0$

$\Leftrightarrow n = 0$

Ainsi, l'application est définie

Ces quatre propriétés nous permettent d'affirmer que

l'application donnée est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$

6) $Z_i(\omega)$ est fini $\forall i \in \mathbb{N}^+$ car Ω est fini

Donc on en déduit que Z_i admet une espérance et un moment d'ordre 2 $\forall i \in \mathbb{N}^+$

Ainsi, par linéarité de l'espérance, en supposant que le couple (a_i, b_i) existe

$E(a_i Z_i + b_i) = 0 \Rightarrow a_i E(Z_i) = -b_i$

et $V(a_i Z_i + b_i) = 1 \Rightarrow a_i^2 V(Z_i) = 1$

on a alors
$$\begin{cases} a_i E(Z_i) = -b_i \\ a_i^2 = \frac{1}{V(Z_i)} \end{cases}$$

($V(Z_i) \neq 0$ car Z_i non nulle car $\#Z_i(\omega) \geq 2$)

$\Rightarrow \begin{cases} a_i E(Z_i) = -b_i \\ a_i = \sqrt{\frac{1}{V(Z_i)}} \end{cases} \quad \text{car } V(Z_i) \geq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} b_i = -\frac{E(Z_i)}{\sqrt{V(Z_i)}} \\ a_i = \sqrt{\frac{1}{V(Z_i)}} \end{cases}$

Ainsi, on a montré l'existence et l'unicité du couple $(a_i, b_i) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

qui vérifie $E(a_i Z_i + b_i) = 0$ et $V(a_i Z_i + b_i) = 1$

Copie anonyme - n°anonymat : 203943

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 282

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths approfondies ESSEC / HEC Paris

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\text{et } a_i = \frac{1}{\sqrt{V(z_i)}} \in \mathbb{R}_+^* \text{ car } \sqrt{V(z_i)} \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\text{et } b_i = -\frac{E(z_i)}{\sqrt{V(z_i)}} \in \mathbb{R}$$

17) $E(V)$ existe car $V(Z)$ est fini car Z est fini et il en est de même pour W .

$$\text{on a } E(V) = \sum_{h=1}^n V(w_h) \times P(V=V(w_h))$$

$$\text{car } \forall h \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(V=V(w_h)) = P(\{w_h\}) = p_h$$

$$\text{Donc } E(V) = \sum_{h=1}^n p_h V(w_h) \times 1$$

$$\underline{E(V) = \langle V, u_0 \rangle}$$

VW prend pour valeurs $(V(w_1) \times W(w_1), \dots, V(w_n) \times W(w_n))$

Donc $E(VW)$ existe car $VW(Z)$ est fini.

$$\text{Donc } E(VW) = \sum_{h=1}^n V(w_h) \times W(w_h) \times P(VW=V(w_h) \times W(w_h))$$

$$\text{car } \forall h \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(VW=V(w_h) \times W(w_h)) = P(\{w_h\}) = p_h$$

$$\text{Ainsi, } E(V) = \sum_{n=1}^n p_n V(w_n) W(w_n)$$

$$\underline{E(V) = \langle V, W \rangle}$$

18) La variable aléatoire X_i est une variable aléatoire réelle sur Ω car Z_i est une $V_i \in \mathbb{R}^l$

De plus, comme $V_i \in \mathbb{R}^l$, $u_i = (X_i(w_1), \dots, X_i(w_n))$

on déduit de ce qui précède que $\langle u_i, u_0 \rangle = E(X_i)$
 $\langle u_i, u_0 \rangle = E(a_i Z_i + b_i)$

$$\underline{\forall i \in \{1, l\} \quad \langle u_i, u_0 \rangle = 0}$$

$$\text{Et que } \langle u_i, u_i \rangle = E(X_i^2) = V(X_i) + \underbrace{(E(X_i))^2}_{=0} \\ = V(a_i Z_i + b_i)$$

$$\underline{\forall i \in \{1, l\}, \langle u_i, u_i \rangle = 1}$$

$$\text{soit } (i, j) \in \{1, l\}^2, i \neq j \quad \langle u_i, u_j \rangle = E(X_i X_j)$$

$$= E((a_i Z_i + b_i)(a_j Z_j + b_j))$$

car comme les variables $Z_1, \dots, Z_l$ sont deux à deux indépendantes,

les variables aléatoires $a_1 Z_1 + b_1, \dots, a_l Z_l + b_l$ le sont également

car les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont également deux à deux indépendantes.
 De sorte que $\forall (i, j) \in \{1, l\}^2, i \neq j, E(X_i X_j) = 0$

$$\underline{\text{soit } \forall (i, j) \in \{1, l\}^2, i \neq j, \langle u_i, u_j \rangle = 0}$$

19) on sait que $l \geq 2$ donc $l+1 \geq 3$

D'après la question précédente,
la famille $(x_1, \dots, x_l)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}^n$

donc c'est une famille libre de $\mathbb{R}^n$

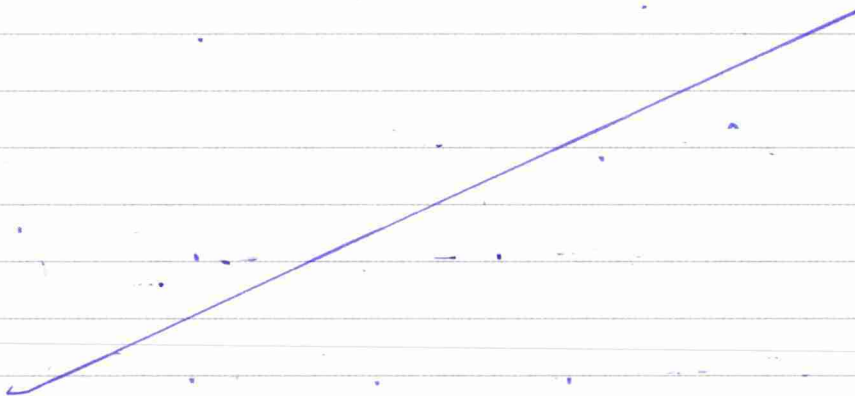
donc on a déjà $l \leq n$

si $l = n$, la famille $(x_1, \dots, x_n)$ serait donc une base
orthogonale de $\mathbb{R}_n$ ce qui n'est pas le cas

Donc $l \neq n$ ie $l < n$ d'où $l+1 \leq n$

Ainsi on a bien $3 \leq l+1 \leq n$

20)



a) on a $\sum_{h=1}^m P(Z=d_h) = 1$ car les événements $(Z=d_1), (Z=d_2), \dots, (Z=d_m)$
i) / sont en système complet
d'événements

$$\text{Et } E(Z) = 0$$

$$\text{ii) ie } \sum_{h=1}^m P(Z=d_h) d_h = 0$$

En prenant $p_1 = p_2 = \dots = p_m = 1$, on a bien

$$\sum_{n=1}^m P(z=d_n) d_n \beta_n = 0 \quad \text{et les } \beta_1 \dots \beta_m \text{ sont tous nuls}$$

b) soit $Q \in \mathbb{R}_{m-1}[x]$, $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T(\lambda Q + P) &= ((\lambda Q + P)(\alpha_1), \dots, (\lambda Q + P)(\alpha_m)) \\ &= (\lambda Q(\alpha_1) + P(\alpha_1), \lambda Q(\alpha_2) + P(\alpha_2), \dots, \lambda Q(\alpha_m) + P(\alpha_m)) \\ &= \lambda T(Q) + T(P) \end{aligned}$$

$$\text{Et } (Q(\alpha_1), \dots, Q(\alpha_m)) \in \mathbb{R}^m$$

Donc T est bien une application linéaire

Mais qu'elle est injective

$$\text{soit } Q \in \ker(T)$$

$$\text{Alors on a } T(Q) = (Q(\alpha_1), \dots, Q(\alpha_m)) = 0$$

$$\text{ie } \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, Q(d_i) = 0$$

car tous les d_i sont distincts deux à deux par définition car
 $m = \# \{d_1, \dots, d_m\}$

Ainsi, le polynôme Q possède m racines distinctes alors qu'il est au plus de degré $m-1$

Donc Q est le polynôme nul

$$\text{Ainsi, } \ker(T) = \{0_{\mathbb{R}_{m-1}[x]}\} \text{ donc } T \text{ est injective}$$

$$\text{or } \dim(\mathbb{R}_{m-1}[x]) = m = \dim(\mathbb{R}^m)$$

Ainsi, par propriété, l'injectivité de T entraîne sa bijectivité

Copie anonyme - n°anonymat : 203943

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 282

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths approfondies ESSEC / HEC PARTS

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc finalement, T est bien un isomorphisme de $R_{n-1}[z]$ dans R^n

c) Si Q existe, $Q(z)(z)$ est fini et donc $E(Q(z))$ existe
et $Q(z)z(z)$ est aussi fini et donc $E(Q(z)z)$ existe

Si Q existe, a a par théorie de transfert,

$$E(Q(z)) = \sum_{h=1}^m Q(\alpha_h) P(z = \alpha_h) = 0$$

$$E(Q(z)z) = \sum_{h=1}^m \alpha_h Q(\alpha_h) P(z = \alpha_h) = 0$$

Dire que $Q(z)(z) \neq \{0\}$ signifie que $(Q(\alpha_1), \dots, Q(\alpha_m)) \neq 0_{R^m}$

car on sait que les $\beta_1, \dots, \beta_m$ vérifient chacune ces conditions

Et donc T est un isomorphisme, elle est à l'image surjective

Donc $\exists Q \in R_{n-1}[z]$ tel que $T(Q) = (\beta_1, \dots, \beta_m)$

$$\text{ie } (Q(\alpha_1), \dots, Q(\alpha_m)) = (\beta_1, \dots, \beta_m)$$

$$\text{et donc } (\beta_1, \dots, \beta_m) \neq (0, \dots, 0), \quad Q(z)(z) \neq \{0\}$$

Ainsi,

$\exists Q \in R_{n-1}[z]$ qui vérifie ces propriétés.

21) a) on a montré que $l+1 \leq n$ i.e. $l \leq n-1$

Donc montrer que $l+r \leq n-1$ revient à montrer que $r=0$



b) on sait que $l \geq 2$ donc $l+r \leq n-1 \Rightarrow r \leq \frac{n-1}{l}$

$$\text{or } l \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{l} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{D'où } \frac{n-1}{l} \leq \frac{n-1}{2} \text{ et donc } \underline{r \leq \frac{n-1}{2}}$$

22) a) si $l = n-1$ et que $l+r \leq n-1$

on obtient alors $r=0$

$$\text{Ainsi, } \{i \in \llbracket 1, l \rrbracket, \# x_i(\mathcal{C}) \geq 2\} = \emptyset$$

$$\text{Duc nécessairement, } \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \# x_i(\mathcal{C}) \leq 2$$

$$\text{or } x_i = a_i z_i + b_i \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \# z_i(\mathcal{C}) \geq 2$$

$$\text{Duc } \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \# x_i(\mathcal{C}) \geq 2$$

$$\text{Nou concluons que, } \underline{\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \# x_i(\mathcal{C}) = 2}$$

b) on sait $E(x_i) = 0$ et $V(x_i) = 1$ (question 16)

Ainsi, dans ces conditions, cela se traduit par :

$$\begin{cases} \alpha_i \theta_i + \beta_i (1 - \theta_i) = 0 \\ \alpha_i^2 \theta_i + \beta_i^2 (1 - \theta_i) = 1 \end{cases} \quad (\text{car } V(x_i) = E(x_i^2))$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_i = \frac{-\alpha_i \theta_i}{(1 - \theta_i)} & (\text{car } 1 - \theta_i \neq 0 \text{ car } \theta_i \in]0, 1[) \\ \alpha_i^2 \theta_i + \left(\frac{\alpha_i^2 \theta_i^2}{(1 - \theta_i)^2} \right) (1 - \theta_i) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_i = \frac{-\alpha_i \theta_i}{(1 - \theta_i)} \\ \alpha_i^2 \left(\theta_i + \frac{(1 - \theta_i) \theta_i^2}{(1 - \theta_i)^2} \right) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_i = \frac{-\alpha_i \theta_i}{(1 - \theta_i)} \\ \alpha_i^2 \left(\frac{(1 - \theta_i) \theta_i + \theta_i^2}{(1 - \theta_i)} \right) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_i = \frac{-\alpha_i \theta_i}{(1 - \theta_i)} \\ \alpha_i^2 \left(\frac{\theta_i}{(1 - \theta_i)} \right) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_i = \frac{-\alpha_i \theta_i}{(1 - \theta_i)} \\ \alpha_i = \sqrt{\frac{1 - \theta_i}{\theta_i}} & (\text{car } \theta_i \neq 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_i = \sqrt{\frac{1 - \theta_i}{\theta_i}} \\ \beta_i = -\frac{1}{\alpha_i} \end{cases}$$

c) Montrons que $r(MD)MD = I_n$

$\forall (i,j) \in \{1,n\}^2$,

$$MD_{ij} = \sum_{k=1}^n M_{ik} P_{kj}$$

$$= M_{ij} P_{ji}$$

$$= \begin{cases} X_i(\omega_j) \sqrt{p_j} & \text{si } i \neq n \\ \sqrt{p_i} & \text{si } i = n \end{cases}$$

$$(r(MD)MD)_{ij} = \sum_{k=1}^n MD_{ki} MD_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} X_k(\omega_i) \sqrt{p_i} X_k(\omega_j) \sqrt{p_j} + \sqrt{p_i} \sqrt{p_j}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $r(MD)MD = I_n$

Donc $MD \in \mathcal{O}(n)$

d)



Copie anonyme - n°anonymat : 203943

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 26

Session : 2024

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Maths approfondies ESSEC / HEC Paris

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie III :

2.3) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^{n^2}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\lambda x + y) = \left[(\lambda x + y)_{(i-1)n+j} \right]_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2}$$

$$\text{car } \forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, (\lambda x + y)_{(i-1)n+j} = \lambda x_{(i-1)n+j} + y_{(i-1)n+j}$$

Donc par propriété sur les sommes des matrices,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x + y) &= \lambda \left[x_{(i-1)n+j} \right]_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2} + \left[y_{(i-1)n+j} \right]_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2} \\ &= \underline{\lambda \varphi(x) + \varphi(y)} \end{aligned}$$

$$\text{Et } \forall x \in \mathbb{R}^{n^2}, \left[x_{(i-1)n+j} \right]_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2} \in M_n(\mathbb{R})$$

Ainsi, φ est bien une application linéaire de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $M_n(\mathbb{R})$

$$\text{soit } x \in \mathbb{R}^{n^2}, \|\varphi(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_{(i-1)n+j})^2}$$

$$\text{et } \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n^2} x_i^2}$$

or dans la somme de $\|v(n)\|$, on retrouve tous les termes

$x_1, \dots, x_n$ ordonnés différemment de sorte que leur somme

soit égale à celle des $x_1, \dots, x_n$

Donc,
$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_{(i-1)n+j})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$$
 car lorsque i et j décrivent $\{1, n\}$, $(i-1)n+j$ décrit $\{1, n^2\}$

D'où par passage à la racine carrée (les termes sont positifs),

il vient : $\forall x \in \mathbb{R}^{n^2}, \|v(x)\| = \|x\|$

soit $A \in M_n(\mathbb{R})$

24) $\|A\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}^2$

or $(AA^T)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ki} A_{kj} \quad \forall (i,j) \in \{1, n\}^2$

Donc $\text{tr}(AA^T) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ki} A_{ki}$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ji}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}^2$$

$\text{tr}(AA^T) = \|A\|^2 \quad \forall A \in M_n(\mathbb{R})$

25)

soit $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n A_{ij}^2 \right)^{1/2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{\sum_{j=1}^n A_{ij}^2}$$

$$\text{or } \forall (i,j) \in [1,n]^2, \sqrt{A_{ij}^2} \leq |A_{ij}|$$

$$\text{Donc } \forall i \in [1,n]^2, \sqrt{\sum_{j=1}^n A_{ij}^2} \leq \sum_{j=1}^n |A_{ij}|$$

$$\text{Donc } \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n A_{ij}^2 \right)^{1/2} \leq F(A)$$

/

$$26) K_n = \{x \in \mathbb{R}^{n^2} \mid \varphi(x) \in O(n)\}$$

$$\varphi(x) \in O(n) \Leftrightarrow {}^t(\varphi(x)) \times \varphi(x) = I_n$$

$$\text{or } {}^t(\varphi(x))_{ij} = \varphi(x)_{ji} = x_{(j-1)n+i}$$

$$\forall (i,j) \in [1,n]^2,$$

$$[{}^t(\varphi(x)) \times \varphi(x)]_{ij} = \sum_{k=1}^n x_{(j-1)n+k} x_{(k-1)n+i}$$

$$\text{on cherche } x \in \mathbb{R}^{n^2} \text{ tq } \sum_{k=1}^n x_{(j-1)n+k} x_{(k-1)n+i} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Posez la fonction φ_i $\forall i \in [1,n]$: $\varphi_i : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sum_{k=1}^n x_{(j-1)n+k} x_{(k-1)n+i}$$

Posons également $\forall (i,j) \in \text{Fin} \mathbb{I}^2, i \neq j,$

$$\varphi_{ij} : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sum_{h=1}^n x_{(i-1)n+h} + x_{(h-1)n+i}$$

Toutes les fonctions φ_i et φ_{ij} sont continues sur $\mathbb{R}^{n^2}$ en tant que fonctions polynomiales

$$\text{Et on a } K_n = \left(\bigcap_{i=1}^{\hat{n}} \varphi_i^{-1} \{1\} \right) \cap \left(\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\hat{n}} \bigcap_{j=1}^{\hat{n}} \varphi_{ij}^{-1} \{0\} \right)$$

Comme $\{1\}$ et $\{0\}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$, $\forall i \in \text{Fin} \mathbb{I}, \varphi_i^{-1} \{1\}$ est un fermé
et $\forall (i,j) \in \text{Fin} \mathbb{I}^2, i \neq j, \varphi_{ij}^{-1} \{0\}$ est un fermé

Donc par intersection de fermés, K_n est un fermé.

27) Maq $\forall x \in \mathbb{R}^{n^2}, \forall y \in \mathbb{R}^{n^2}, |F(\varphi(x)) - F(\varphi(y))| \leq n \|x - y\|$
soit $x \in \mathbb{R}^{n^2}$ soit $y \in \mathbb{R}^{n^2}$

$$F(\varphi(x)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_{(i-1)n+j}|$$

$$F(\varphi(y)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |y_{(i-1)n+j}|$$

$$|F(\varphi(x)) - F(\varphi(y))| = \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_{(i-1)n+j}| - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |y_{(i-1)n+j}| \right|$$

Puis par inégalité triangulaire,

$$|F(\varphi(x)) - F(\varphi(y))| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_{(i-1)n+j} - y_{(i-1)n+j}| = F(\varphi(x) - \varphi(y))$$

Copie anonyme - n°anonymat : 203943

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 26

Session : 2024

Épreuve de : Maths approfondies EISEC / HEC Paris

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

or d'après la question 25),

$$F(\ell(x) - \ell(y)) \leq n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_{(i-1)n+j} - y_{(i-1)n+j})^2 \right)^{1/2}$$
$$= \|\ell(x) - \ell(y)\| = \|x - y\|$$

$$\text{Donc } F(\ell(x) - \ell(y)) \leq n \|x - y\|$$

Au final, $\forall x \in \mathbb{R}^{n^2}, \forall y \in \mathbb{R}^{n^2},$

$$\underline{|F(\ell(x)) - F(\ell(y))| \leq n \|x - y\|}$$

28) La fonction $F \circ \ell$ est continue sur $\mathbb{R}^{n^2}$ comme composition de fonctions continues sur $\mathbb{R}^{n^2}$ et $M_n(\mathbb{R})$

$$29) M_n = \min_{Q \in O(n)} F(Q)$$

$$\text{Soit } Q \in O(n) \quad F(Q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |q_{ij}|$$

Q a au moins n termes supérieurs ou égaux à 1 sinon elle
serait pas inversible et donc pas orthogonale

$$\text{Donc } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |q_{ij}| \geq n$$

ie $\min_{Q \in O(n)} F(Q) = n$ et il est atteint pour $Q = I_n$

