

Copie anonyme - n°anonymat : 886134



T6-00371
886134
Mat Appro

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 31

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques en Lyom

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème 1:

1) Soit $(A, M) \in (M_m(\mathbb{C}))^2$ tel que $M^2 = A$

$$\begin{aligned} \text{donc } AM &= M^2 M \\ &= M^3 \\ &= M^{-1} M^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{AM = MA}$$

2) • Supposons que A est inversible ;
on a $M^2 = A$

$$M^2 A^{-1} = I_m$$

$$M M A^{-1} = I_m$$

$$M(M A^{-1}) = I_m$$

donc M est inversible et $M^{-1} = M A^{-1}$

A est inversible $\Rightarrow M$ est inversible (1)

• Supposons que M est inversible :

$$\text{on } M^2 = A$$

$$M = A M^{-1}$$

$$I_m = A(M^{-1} M^{-1})$$

donc A est inversible et $A^{-1} = M^{-1} M^{-1}$

M est inversible $\Rightarrow A$ est inversible (2)

Par (1) et (2):

$$\boxed{A \text{ est inversible} \Leftrightarrow M \text{ est inversible}}$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ a) } A^2 &= AA \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^2 = -I_2}$$

on pose $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = x^2 + 1$

donc $P(A) = A^2 + I_2 = 0$

P est un polynôme annulateur de A

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } A &\Rightarrow P(\lambda) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{on } \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \lambda^2 + 1 > 0$$

donc $P(\lambda)$ n'admet pas de solutions

donc A n'admet pas de valeur propre

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

$$3) \text{ b) } \text{ Soit } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ tel que } M^2 = A$$

$$\begin{aligned} \text{on } M^2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + cd & cb + d^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{donc } M^2 = A \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ ab + bd = 1 \\ ca + cd = -1 \\ cb + d^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = -bc \\ ab + bd = 1 \\ c(a+d) = -1 \\ bc = -d^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = d^2 \\ b(a+d) = 1 \\ c(a+d) = -1 \\ -bc = d^2 \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a = d \\ 2ba = 1 \\ 2ca = -1 \\ -bc = d^2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = -d \\ b = 0 \\ c = 0 \\ -bc = d^2 \end{cases}$$

$$M^2 = A \Rightarrow \begin{cases} a = d \\ \text{et } b = -c \end{cases}$$

$$\text{donc } \boxed{M^2 = A \quad \text{alors} \quad a = d \quad \text{et} \quad b = -c}$$

3) c) Reprenons l'équation (*) dans 3) b)

$$\text{donc } \begin{cases} a = d \\ 2ba = 1 \\ 2ca = -1 \\ -bc = d^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = d \\ ab = \frac{1}{2} \\ ac = -\frac{1}{2} \\ -bc = d^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ d = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} d = -\frac{1}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{on remarque que si } M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$\text{alors } M^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$S: M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

alors $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A$

on a donc des solutions de M

4) a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

A est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux

$$Sp(A) = \{0\}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

on pose E_λ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$

$$X \in E_0 \Leftrightarrow AX = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

donc $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $z \in \mathbb{R}$

$$E_0 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\dim(E_0) = 1 \neq 3$$

donc A n'est pas diagonalisable

4) b) $M^4 = M^2 M^2$

$$= AA$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\boxed{M^4 \neq 0}$$

ok/

Copie anonyme - n°anonymat : 886134

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 29 5

Nombre de pages : 31

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques en lyonn

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$M^6 = M^4 M^2$$

$$= M^4 A$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

h) c) $p = \min \{ k \in \mathbb{N}^* : M^k = 0 \}$

donc $M^{p-1} \neq 0$ et $M^{p-2} \neq 0 \dots M^1 \neq 0$ (car si $M=0$ alors $M^2=0$ donc $A=0$ on c'est faux)

on f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par M dans la base canonique

donc $\forall k \in [0, p-1] f^k \neq 0$
 $\exists u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0\}$ tel que $\forall k \in [0, p-1] f^k(u) \neq 0$
 Soit $(k_1, \dots, k_{p-1}) \in \mathbb{N}^p$ tel que $\sum_{k=0}^{p-1} f^{k_k}(u) = 0$

f n'arrive pas à conclure...

h) d)

5) a) $M \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $M^2 = I_n$

on pose $\forall x \in \mathbb{R} \quad p(x) = x^2 - 1$

donc $P(M) = M^2 - I_n = 0$

donc P est un polynôme annulateur de M

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$

λ est valeur propre de $M \Rightarrow P(\lambda) = 0$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 1 = \lambda \text{ ou } \lambda = -1$$

donc $\text{Sp}(M) \subset \{-1, 1\}$

5) b) Soit $x \in \ker(f - \text{id}) \cap \ker(f + \text{id})$

donc $f(x) = x$ car $x \in \ker(f - \text{id})$

on $f(x) = -x$ car $x \in \ker(f + \text{id})$

donc $x = -x$

$$x = 0$$

donc $\ker(f - \text{id}) \cap \ker(f + \text{id}) \subset \{0\}$

or $\{0\} \subset \ker(f - \text{id}) \cap \ker(f + \text{id})$ car $\ker(f - \text{id})$ et $\ker(f + \text{id})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

donc $\ker(f - \text{id}) \cap \ker(f + \text{id}) = \{0\} \quad (1)$

De plus soit $x \in \mathbb{R}^n$, soit $z \in \ker(f - \text{id})$ et $t \in \ker(f + \text{id})$

donc $f(z) = z$ $f(t) = -t$

donc $f(z) + f(t) = z - t$

$$f(z+t) = z - t$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \exists (y, t) \in \ker(f - \text{id}) \times \ker(f + \text{id})$$

$$\text{tel que } x = y + t \quad (2)$$

Par (1) et (2) :

$$\mathbb{R}^n = \ker(f - \text{id}) \oplus \ker(f + \text{id})$$

5) c) d'après 5) a) et 5) b) $\text{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$

$$\text{et } \dim(\ker(f - \text{id})) + \dim(\ker(f + \text{id})) = \dim(\mathbb{R}^n)$$

~~Prouvons que 1 et -1 sont valeurs propres de M et f :
Supposons que 1 ne soit pas valeur propre de M , donc $M - I_n$ est inversible~~

Si 1 et/ou -1 sont valeurs propres de f
alors la somme des dimensions
de leur sous-espace propre est égale à
la dimension de $\mathbb{R}^n$ donc
 f est diagonalisable

donc M est diagonalisable

5) d) M est diagonalisable de valeurs propres potentielles 1 et -1. $\exists P \in M_n(\mathbb{R})$ et D diagonale tel que

$$P^{-1}MP = D \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{où } \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ \varepsilon_i \in \{-1, 1\} \end{array}$$

$$M = PDP^{-1}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation $M^2 = I_n$
est l'ensemble des matrices semblables aux matrices
diagonales où tous les éléments sont égaux à 1
ou à -1

6) a) $S_p(A) = \{ \lambda_1, \dots, \lambda_m \}$ tel que $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_m$

$\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont deux à deux distincts

donc A admet m valeurs propres distinctes
et $A \in M_m(\mathbb{R})$

donc A est diagonalisable

$\exists P \in M_m(\mathbb{R})$ inversible et $D \in M_m(\mathbb{R})$ diagonale tel que:
 $A = PDP^{-1}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les coefficients
diagonaux de D

6) b) Soit $M \in M_m(\mathbb{R})$ et $N = P^{-1}MP$

• Supposons que $M^2 = A$

$$\text{donc } N^2 = P^{-1}MP P^{-1}MP$$

$$= P^{-1}MMP$$

$$= P^{-1}M^2P$$

$$= P^{-1}AP$$

$$N^2 = D \quad \text{par 6) a)}$$

• Supposons que $N^2 = D$

$$\text{donc } (P^{-1}MP)(P^{-1}MP) = (P^{-1}AP) \quad \text{par 6) a)}$$

$$P^{-1}M^2P = P^{-1}AP$$

$$PP^{-1}M^2PP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1}$$

$$M^2 = A$$

donc

$$M^2 = A \Leftrightarrow N^2 = D$$

6) d) Supposons que A admet au moins une valeur
valeur propre strictement négative
donc $\lambda_1 < 0$ car $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_m$

• Supposons que $M^2 = A$

alors $N^2 = D$ et N est diagonale par 6) c)

or λ_1 est un des coefficients de D

par 6) a)

Copie anonyme - n°anonymat : 886134

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 31

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques en Lyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

cependant comme N est diagonale alors N^2 est une matrice diagonale avec que des coefficients positifs sur sa diagonale
on $N^2 = D$ et D admet au moins un coefficient strictement négatif sur sa diagonale
donc on a une contradiction
donc $M^2 \neq A$

Si A admet au moins une valeur propre strictement négative alors $M^2 = A$ n'admet pas de solution

6)e) A l'inverse si A n'admet aucune valeur propre strictement négative alors $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$

et $\exists N \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $N^2 = D$
avec $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$ les coefficients

de la matrice diagonale N
on peut car on a supposé que $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$

donc par 6)b) $\exists M \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $M^2 = A$

De plus $N = P^{-1}MP$ donc $M = PNP^{-1}$

donc l'ensemble des solutions dans le cas où $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$ est l'ensemble des matrices semblables aux matrices diagonales N tel que $N^2 = D$

7) a) A est symétrique donc Diagonalisable
 $\exists P \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonal et $D \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale
 tel que $A = P D {}^tP$ avec $P^{-1} = {}^tP$ et D une
 matrice diagonale avec
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ est coefficients
 diagonaux

on pose $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

on pose $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ on peut car
 $\forall i \in [1, n] \lambda_i > 0$
 donc $\Delta^2 = D$

on pose alors $M \in M_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$\begin{aligned} M &= P \Delta {}^tP \\ \text{donc } M^2 &= (P \Delta {}^tP)(P \Delta {}^tP) \\ M^2 &= P \Delta^2 {}^tP \quad \text{car } {}^tP = P^{-1} \\ M^2 &= P D {}^tP \\ M^2 &= A \end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned} {}^tM &= {}^t(P \Delta {}^tP) \\ &= {}^t(P ({}^t\Delta {}^tP)) \\ &= {}^t({}^t\Delta {}^tP) {}^tP \\ &= {}^t({}^tP) {}^t\Delta {}^tP \\ &= P {}^t\Delta {}^tP \\ &= P \Delta {}^tP \quad \text{car } \Delta \text{ est diagonale} \\ {}^tM &= M \quad \text{donc } {}^t\Delta = \Delta \end{aligned}$$

donc M est symétrique
 et M admet pour valeurs propres $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$
 qui sont strictement positive car $\forall i \in [1, n] \lambda_i > 0$

donc il existe M symétrique avec des valeurs propres strictement
 positives telles que $M^2 = A$

7) b) i) M_1 et M_2 sont symétriques ayant pour valeurs propres $a_1, \dots, a_m$ pour M_1 et $b_1, \dots, b_m$ pour M_2 qui sont strictement positive

M_1 et M_2 sont diagonalisables
 $\exists (P_1, P_2) \in (M_m(\mathbb{R}))^2$ orthogonales et $(D_1, D_2) \in (M_m(\mathbb{R}))^2$ diagonales
 telles que $M_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}$ et $M_2 = P_2 D_2 P_2^{-1}$
 avec $a_1, \dots, a_m$ les coefficients diagonaux de D_1 et $b_1, \dots, b_m$ les coefficients diagonaux de D_2

$$\begin{aligned}
 \text{ii) } P &= P_1^{-1} P_2 & D_1^2 P &= (P_1^{-1} M_1 P_1) (P_1^{-1} M_1 P_1) (P_1^{-1} P_2) \\
 & & &= (P_1^{-1} M_1^2 P_1) P_1^{-1} P_2 \\
 & & &= (P_1^{-1} M_2^2 P_2) \quad \text{car } M_1^2 = M_2^2 \\
 & & &= P_1^{-1} P_2 (P_2^{-1} M_2^2 P_2) \\
 & & &= P (P_2^{-1} M_2^2 P_2) \\
 & & &= P (P_2^{-1} M_2 P_2) (P_2^{-1} M_2 P_2)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{D_1^2 P = P D_2^2}$$

comme D_1 et D_2 sont diagonaux alors D_1^2 et D_2^2 le sont aussi et leurs coefficients diagonaux sont au carré, on leur coefficient diagonaux sont $a_1, \dots, a_m$ et $b_1, \dots, b_m$

$$\text{donc } \boxed{\forall (i, j) \in \{1, m\}^2 \quad a_i^2(P)_{i,j} = (P)_{i,j} b_j^2}$$

$$\text{iii) Par ii) : } \forall (i, j) \in \{1, m\}^2 \quad a_i^2(P)_{i,j} = (P)_{i,j} b_j^2$$

admettons le résultat

$$\text{donc } \forall (i, j) \in \{1, m\}^2 \quad a_i(P)_{i,j} = (P)_{i,j} b_j^2$$

donc $\boxed{D_1 P = P D_2}$

(v) $P_1 P = P D_2$ par (ii)

$$(P_1^{-1} M_1 P_1) (P_1^{-1} P_2) = (P_1^{-1} P_2) (P_2^{-1} M_2 P_2)$$

$$P_1^{-1} M_1 P_2 = P_1^{-1} M_2 P_2$$

$$P_1 P_1^{-1} M_1 P_2 P_2^{-1} = P_1 P_1^{-1} M_2 P_2 P_2^{-1}$$

$$\boxed{M_1 = M_2}$$

Partie 2:

8) (1) $\forall (A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2 \quad (A, B) = \text{tr}({}^t A B)$

on $\text{tr}({}^t A B) \in \mathbb{R}$

donc $(,)$ est une application de $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$

(2) $\forall (A, B, C) \in (M_n(\mathbb{R}))^3 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} (\lambda A + \mu B, C) &= \text{tr}({}^t (\lambda A + \mu B) C) \\ &= \text{tr}((\lambda {}^t A + \mu {}^t B) C) \\ &= \text{tr}(\lambda {}^t A C + \mu {}^t B C) \\ &= \lambda \text{tr}({}^t A C) + \mu \text{tr}({}^t B C) \end{aligned}$$

car tr est linéaire

$$(\lambda A + \mu B, C) = \lambda (A, C) + \mu (B, C)$$

donc $(,)$ est linéaire sur la première variable

(3) $\forall (A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2 \quad (A, B) = \text{tr}({}^t A B)$

on on pose $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

donc ${}^t A = (a_{ji})_{1 \leq i, j \leq n}$

Copie anonyme - n°anonymat : 886134

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 31

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques en Lyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

on pose $({}^tAB) = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ et $({}^tBA) = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$

donc $\forall (i, j) \in [1, m]^2$ $c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{k,i} b_{k,j}$

et $\forall (i, j) \in [1, m]^2$ $d_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{k,i} a_{k,j}$

donc $c_{i,i} = \sum_{k=1}^m a_{k,i} b_{k,i}$ et $d_{i,i} = \sum_{k=1}^m b_{k,i} a_{k,i}$
en particulier

$$t_1({}^tAB) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{k,i} b_{k,i}$$

$$\text{et } t_1({}^tBA) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m b_{k,i} a_{k,i}$$

$$\text{donc } t_1({}^tBA) = t_1({}^tAB) \\ (A, B) = (B, A)$$

donc (i) est symétrique
tel que $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$

$$\textcircled{4} \quad \forall A \in M_m(\mathbb{R}) \quad (A, A) = t_1({}^tAA) \\ = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m (a_{k,i})^2$$

$$\text{or } \forall (k, i) \in [1, m]^2 \quad (a_{k,i})^2 \geq 0$$

$$\text{donc } \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m (a_{k,i})^2 \geq 0$$

$$(A, A) \geq 0$$

$$(A, A) = 0 \Leftrightarrow t_1({}^tAA) = 0$$

$$(A, A) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^m (a_{k,i})^2 = 0$$

$$(\Rightarrow) \forall (i, k) \in \{1, \dots, m\}^2 \quad (a_{k,i})^2 = 0 \quad \text{car } \forall (i, k) \in \{1, \dots, m\}^2 \quad (a_{k,i})^2 \geq 0$$

$$(\Rightarrow) \forall (i, k) \in \{1, \dots, m\}^2 \quad a_{k,i} = 0$$

$$(A, A) \quad (\Leftrightarrow) \quad A = 0$$

$(,)$ est définie positive

Par (1), (2), (3) et (4) : $(,)$ est un produit scalaire

$$g) \quad \|M\|_2 = \sqrt{(M, M)}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m (m_{k,i})^2} \quad \text{par 8)}$$

$$\text{on} \quad \forall (p, k) \in \{1, \dots, m\}^2 \quad m_{k,p} \leq \max_{1 \leq i, j \leq m} |(M)_{i,j}|$$

$$(m_{k,p})^2 \leq \left(\max_{1 \leq i, j \leq m} |(M)_{i,j}| \right)^2$$

$$\sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^m (m_{k,p})^2 \leq m^2 \max_{1 \leq i, j \leq m} |(M)_{i,j}|^2$$

$$\sqrt{\sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^m (m_{k,p})^2} \leq m \max_{1 \leq i, j \leq m} |(M)_{i,j}| \quad \text{car } m \geq 1$$

$$\forall M \in M_m(\mathbb{R}) \quad \|M\|_2 \leq m \times \max_{1 \leq i, j \leq m} |(M)_{i,j}|$$

Ex) Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} (M_n) = L$

11) a) $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad e(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)$

e est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad e'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2}$$

$$e'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2x^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 \geq 1$$

$$e'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \quad \text{ou} \quad x \leq -1$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (e(x)) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (e(x)) = -\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (e(x)) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (e(x)) = -\infty \end{cases}$$

$$e(1) = 1 \quad e(-1) = -1$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$e'(x)$	+	0	-	0	+
$e(x)$	$-\infty$	-1	$+\infty$	1	$+\infty$

11) b) on pose $\mathcal{P}(n) : "$ si $a > 0$ alors U_n est définie
 $|U_n| \geq 1$ et U_n a le même signe que a "

$$U_1 = \frac{1}{2} \left(U_0 + \frac{1}{U_0} \right)$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right)$$

U_1 est bien définie car $a > 0$

De plus d'après 11)a) $\forall x \in \mathbb{R}^* |e(x)| \geq 1$

donc $|U_1| \geq 1$

et $U_1 > 0$ car $a > 0$ et $\frac{1}{a} > 0$

donc U_1 a le même signe que a

$\mathcal{P}(1)$ est vraie

Supposons $\mathcal{P}(m)$ vraie pour un entier $m \geq 1$:

$$U_{m+1} = \frac{1}{2} \left(U_m + \frac{1}{U_m} \right) \quad \text{donc } U_{m+1} \text{ est bien}$$

définie car par hypothèse de
réurrence U_m est de même
signe que a donc $U_m > 0$

de plus U_{m+1} est donc strictement
positive car $U_m > 0$ par hypothèse
de réurrence
de plus par 11) $|e(U_m)| \geq 1$

$$\text{donc } |U_{m+1}| \geq 1$$

donc $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie

$$\begin{cases} \mathcal{P}(1) \text{ est vraie} \\ \forall m \in \mathbb{N}^* \quad \mathcal{P}(m) \Rightarrow \mathcal{P}(m+1) \end{cases}$$

Par récurrence : $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^* \quad \mathcal{P}(m) \text{ est vraie}}$

$$\begin{aligned} 11)c) \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \quad U_{m+1} - U_m &= \frac{1}{2} U_m + \frac{1}{2 U_m} - U_m \\ &= \frac{1}{2 U_m} - \frac{1}{2} U_m \\ &= \frac{1 - U_m^2}{2 U_m} \end{aligned}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 886134

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 31

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques en Lyom

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

• Si $a > 0$:

$$\text{alors } \forall m \geq 1 \quad |U_m| \geq 1$$

$$U_m \geq 1 \quad \text{car } \forall m \geq 1 \quad U_m \geq 0 \quad \text{par 11) b)}$$

$$U_m^2 \geq 1$$

$$1 - U_m^2 \leq 0$$

$$\text{donc } \forall m \geq 1 \quad U_{m+1} - U_m \leq 0$$

$$U_{m+1} \leq U_m$$

donc $(U_m)_{m \geq 1}$ est décroissante

• Si $a \leq 0$:

$$\text{alors } \forall m \geq 1 \quad U_m \leq 0 \quad \text{par 11) b)}$$

$$\text{et } |U_m| \geq 1$$

$$\text{donc } U_m \leq -1$$

$$U_m^2 \geq 1$$

$$\text{donc } 1 - U_m^2 \leq 0$$

$$\text{donc } \frac{1 - U_m^2}{2U_m} \geq 0 \quad \text{car } \forall m \geq 1 \quad U_m \leq 0$$

$$\forall m \geq 1 \quad U_{m+1} \geq U_m$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $(V_m)_{m \geq 1}$ est croissante

donc $(V_m)_{m \geq 1}$ est majorée

Problème 2:

Partie 1:

1) on pose $\mathcal{P}(m)$: " I_m converge et $I_m = m!$ "

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-u} du$$

on $\int_0^{+\infty} e^{-u} du$ est une intégrale convergente

$$I_0 = \lim_{y \rightarrow +\infty} (1 - e^{-y}) \int_0^y$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} (-e^{-y} + 1)$$

$$= 1$$

$$I_0 = 0!$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie

Supposons $\mathcal{P}(m)$ vraie pour un entier $m \geq 0$:

donc I_m converge

et $I_m = m!$

$$\text{on } I_{m+1} = \int_0^{+\infty} u^{m+1} e^{-u} du$$

$$= \int_0^{+\infty} u u^m e^{-u} du$$

Soit $A \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ pose:

$$t(u) = -e^{-u}$$

$$v(u) = u^{m+1}$$

$$t'(u) = e^{-u}$$

$$v'(u) = (m+1)u^m$$

t et v sont de classe C^1 sur $[0, A]$

Par intégration par parties:

$$\int_0^A u^{m+1} e^{-u} du = \left[-e^{-u} u^{m+1} \right]_0^A + (m+1) \int_0^A u^m e^{-u} du$$

$$= -e^{-A} A^{m+1} + (m+1) \int_0^A u^m e^{-u} du$$

$$\text{on } \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{A^{m+1}}{e^A} \right) = 0 \quad \text{par croissance comparée}$$

et I_m converge et vaut $m!$

donc $\int_0^{+\infty} u^{m+1} e^{-u} du$ converge et par passage à la limite lorsque A tends en $+\infty$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} u^{m+1} e^{-u} du &= (m+1)I_m \\ &= (m+1)m! \end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence

$$I_{m+1} = (m+1)!$$

$\mathcal{P}(m+1)$ est vraie

$\mathcal{P}(0)$ est vraie

$\forall m \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}(m) \Rightarrow \mathcal{P}(m+1)$

Par récurrence: $\boxed{\forall m \in \mathbb{N} \quad I_m = m!}$

2) a) h_m est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$, sur $]0, \frac{1}{m}[$

sur $] \frac{1}{m}, \frac{2}{m}[$ et sur $] \frac{2}{m}, +\infty[$

$$\forall t \in]-\infty, 0[\quad h'_m(t) = 0$$

$$\forall t \in] \frac{2}{m}, +\infty[\quad h'_m(t) = 0$$

$$\forall t \in]0, \frac{1}{m}[\quad h'_m(t) = m^2 \quad \text{donc } h'_m(t) \geq 0$$

h_m est croissante sur $]0, \frac{1}{m}[$

$$\forall t \in] \frac{1}{m}, \frac{2}{m}[\quad h'_m(t) = -m^2 \quad \text{donc } h'_m(t) \leq 0$$

h_m est décroissante sur $] \frac{1}{m}, \frac{2}{m}[$

Finalement: $\boxed{h_m \text{ est croissante sur }]0, \frac{1}{m}[\text{ et décroissante sur }] \frac{1}{m}, \frac{2}{m}[\text{ et égale à } 0 \text{ sur }]-\infty, 0[\text{ et sur }] \frac{2}{m}, +\infty[}$

(i) d'après ce qu'on vient de faire:
 $\forall t \in \mathbb{R} \quad h_m(t) \geq 0$

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 31

Session : 2024

Épreuve de : Math em Lyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

② h_m est continue sur $]-\infty, 0[$, sur $]0, \frac{1}{m}[$

sur $]\frac{1}{m}, \frac{2}{m}[$ et sur $]\frac{2}{m}; +\infty[$

③
$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_m(t) dt = \int_0^{2/m} h_m(t) dt$$

on
$$\int_0^{1/m} h_m(t) dt = \int_0^{1/m} m^2 t dt$$

et $t \mapsto m^2 t$ est continue sur $[0, \frac{1}{m}]$ donc

$\int_0^{1/m} h_m(t) dt$ existe

et
$$\int_{1/m}^{2/m} h_m(t) dt = \int_{1/m}^{2/m} m^2 \left(\frac{2}{m} - t \right) dt$$

on $t \mapsto m^2 \left(\frac{2}{m} - t \right)$ est continue sur $[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}]$ donc

$\int_{1/m}^{2/m} h_m(t) dt$ existe

donc $\int_0^{2/m} h_m(t) dt$ existe

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} h_m(t) dt$ existe et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_m(t) dt = \int_0^{1/m} h_m(t) dt + \int_{1/m}^{2/m} h_m(t) dt$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} h_m(t) dt &= m^2 \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{1/m} + m^2 \left[\frac{2}{m} t - \frac{t^2}{2} \right]_{\frac{1}{m}}^{\frac{2}{m}} \\
 &= m^2 \left(\frac{1}{2m^2} \right) + m^2 \left(\frac{4}{m^2} - \frac{4}{2m^2} - \frac{2}{m^2} + \frac{1}{2m^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} + \left(4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_m(t) dt = 1$$

Par ①, ②, ③ : h_m peut être considérée comme une densité de probabilité

2) b) Soit $t \in [0, 1]$

Partie 2:

3) $\forall i \in \mathbb{N}^*$ $Y_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}
 E(S_m) &= \sum_{i=1}^m E(Y_i) \quad \text{par linéarité de l'espérance} \\
 &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{E(S_m) = \frac{m}{\lambda}}$$

$$V(S_m) = V\left(\sum_{i=1}^m Y_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^m V(Y_i) \quad \text{car } Y_1, \dots, Y_m \text{ sont indépendantes}$$

$$= \sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\boxed{V(S_m) = \frac{m}{\lambda^2}}$$

h) a) Vient* on pose F la fonction de répartition de $X_i^- = \lambda Y_i^-$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = P(\lambda Y_i^- \leq x) \\ = P(Y_i^- \leq \frac{x}{\lambda}) \quad \text{car } \lambda > 0$$

* Si $x \geq 0$ alors $\frac{x}{\lambda} \geq 0$ car $\lambda > 0$

$$\text{donc} \quad F(x) = 1 - e^{-\lambda(\frac{x}{\lambda})} \\ = 1 - e^{-x}$$

* Si $x < 0$ alors $\frac{x}{\lambda} < 0$ car $\lambda > 0$

$$\text{donc} \quad F(x) = 0$$

$$\text{donc} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\boxed{\forall i \in [1, m] \quad X_i \cap \mathcal{I}}$$

h) b) on pose $\mathcal{P}(m) := \lambda S_m \cap \gamma(m) =$

$$\lambda S_1 = \lambda Y_1^- = X_1$$

$$\lambda S_1 = X_1$$

on par h) a) $X_1 \cap \mathcal{I}$

$$\text{donc} \quad \lambda S_1 \cap \mathcal{I}$$

$$\lambda S_1 \cap \gamma(1)$$

donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie

Supposons $\mathcal{P}(m)$ vraie pour $m \geq 1$:

$$\lambda S_m \cap \gamma(m)$$

$$\text{on} \quad \lambda S_{m+1} = \lambda S_m + \lambda Y_{m+1}^- = \lambda S_m + X_{m+1}$$

par hypothèse de récurrence
on $\lambda S_m \cap \gamma(m)$ et $X_{m+1} \cap \gamma(m+1)$ par h) a)

$Y_1, \dots, Y_m, Y_{m+1}$ sont indépendantes

donc $\lambda \sum_{i=1}^m Y_i$ et λY_{m+1} sont indépendantes

Par la stabilité de la loi gamma :

$$\lambda \sum_{i=1}^m Y_i + \lambda Y_{m+1} \subset \gamma(m+1)$$

$$\lambda S_{m+1} \subset \gamma(m+1)$$

$\mathcal{P}(m+1)$ est vraie

$\mathcal{P}(1)$ est vraie

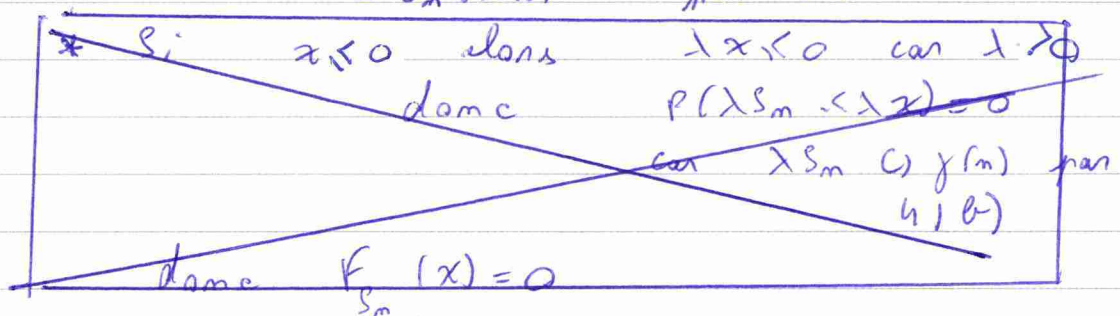
$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad \mathcal{P}(m) \Rightarrow \mathcal{P}(m+1)$

Par récurrence : $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^* \quad \lambda S_m \subset \gamma(m)}$

4)c) On pose F_{S_m} la fonction de répartition de S_m
et G_m la fonction de répartition de la loi $\gamma(m)$
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad F_{S_m}(x) = P(S_m \leq x)$

$$= P(\lambda S_m \leq \lambda x) \quad \text{car } \lambda > 0$$

$$= G_m(\lambda x) \quad \text{par 4)b)}$$



G_m est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction de répartition)
et $x \mapsto \lambda x$ est continue sur $\mathbb{R}$
Par composition, F_{S_m} est continue sur $\mathbb{R}$ (1)

G_m est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$
 $x \mapsto \lambda x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$
Par composition, F_{S_m} est de classe C^1
sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ (2)

Copie anonyme - n°anonymat : 886134

Emplacement QR Code	Code épreuve : 295	Nombre de pages : 32	Session : 2024
	Épreuve de : Math EM Lyon		
	Consignes - Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer - Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir - Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) - Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) - Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre		

Par (1) et (2) : S_m admet une densité

$\forall x \in]-\infty; 0[\quad f'_{S_m}(x) = \lambda G'_m(\lambda x)$
 $= 0 \quad \text{car } \lambda x < 0$

$\forall x \in]0; +\infty[\quad f'_{S_m}(x) = \lambda G'_m(\lambda x)$
 $= \lambda \left(\frac{1}{\Gamma(m)} e^{-\lambda x} (\lambda x)^{m-1} \right)$
 $= \frac{\lambda}{(m-1)!} e^{-\lambda x} (\lambda x)^{m-1}$

On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_{S_m}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\lambda}{(m-1)!} e^{-\lambda x} (\lambda x)^{m-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

f_{S_m} est une densité de S_m

5) a) D'après le théorème de transfert :

$\frac{1}{S_m}$ admet une espérance $(\Leftrightarrow) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} f_{S_m}(t) dt$ converge absolument

$(\Leftrightarrow) \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f_{S_m}(t) dt$ converge absolument

25/32

$$\text{on } \int_0^{+\infty} \left| \frac{1}{t} f_{S_m}(t) \right| dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f_{S_m}(t) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda)^m}{(m-1)!} e^{-\lambda t} t^{m-2} dt$$

on pose $u = \lambda t$ (changement de variable affine)

$$t = \frac{u}{\lambda} \quad \text{car } \lambda > 0$$

$$dt = \frac{1}{\lambda} du$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Si } t \rightarrow +\infty & \text{alors } u \rightarrow +\infty \\ \text{Si } t \rightarrow 0 & \text{alors } u \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\lambda)^m}{(m-1)!} e^{-\lambda t} t^{m-2} dt \text{ converge } (\Leftrightarrow) \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^m}{(m-1)!} e^{-u} \left(\frac{u}{\lambda} \right)^{m-2} \left(\frac{1}{\lambda} \right) du$$

converge

$$\text{on } \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^m}{(m-1)!} e^{-u} \left(\frac{u}{\lambda} \right)^{m-2} \left(\frac{1}{\lambda} \right) du = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{(m-1)!} e^{-u} u^{m-2} du$$

$$\text{on } \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{m-2} du \text{ converge } (\Leftrightarrow) m-2 \geq 0 \text{ par 1)}$$

$(\Leftrightarrow) m \geq 2$

• Si $m \in \{0, 1\}$ alors $\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{m-2} du$ diverge
et donc S_m n'admet pas d'espérance

• Si $m \geq 2$: alors $\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{m-2} du$ converge

donc $\int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{(n-1)!} e^{-u} u^{n-2} du$ converge et vaut $\frac{\lambda}{n-1}$ par i)

donc $\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} t^{n-2} dt$ converge et vaut $\frac{\lambda}{n-1}$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f_{S_m}(t) dt$ converge

$\frac{1}{S_m}$ admet une espérance

D'après le théorème de transfert :

$$\forall m \geq 2 \quad E\left(\frac{1}{S_m}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} f_{S_m}(t) dt$$

$$\boxed{E\left(\frac{1}{S_m}\right) = \frac{\lambda}{(m-1)!}}$$

5) b) De même, d'après le théorème de transfert :

$\frac{1}{S_m}$ admet une variance

($\Rightarrow$) $\frac{1}{S_m^2}$ admet une espérance

($\Rightarrow$) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} f_{S_m}(t) dt$ converge absolument

($\Rightarrow$) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} f_{S_m}(t) dt$ converge car $t \mapsto \frac{1}{t^2} f_{S_m}(t)$ est positif

($\Rightarrow$) $\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-u} u^{n-3} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-2} du$ converge sur u^* (avec le changement de variable $u = \lambda t$) affine

($\Rightarrow$) $m \geq 3$

• Si $m < 3$

$\frac{1}{S_m}$ n'admet pas de variance

• Si $m \geq 3$ $\frac{1}{S_m}$ admet une variance

$$\text{et } E\left(\frac{1}{S_m^2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^2}{(m-1)!} e^{-u} u^{m-3} du$$

$$E\left(\frac{1}{S_m^2}\right) = \frac{\lambda^2}{(m-1)(m-2)} \quad \text{par 1)}$$

$$V\left(\frac{1}{S_m}\right) = E\left(\frac{1}{S_m^2}\right) - E\left(\frac{1}{S_m}\right)^2$$

$$= \frac{\lambda^2}{(m-1)(m-2)} - \frac{\lambda^2}{(m-1)^2} \quad \text{par 5)a)}$$

$$= \frac{\lambda^2(m-1) - \lambda^2(m-2)}{(m-1)^2(m-2)}$$

$$= \frac{\lambda^2(m-1-m+2)}{(m-1)^2(m-2)}$$

$$\forall m \geq 3 \quad V\left(\frac{1}{S_m}\right) = \frac{\lambda^2}{(m-1)^2(m-2)}$$

$$6) \quad W_m = \frac{\lambda}{\sqrt{m}} S_m - \sqrt{m}$$

S_m est a densité

Donc d'après le cours, W_m est a densité
(changement de variable affine)

on pose F_{W_m} la fonction de répartition de W_m

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_{W_m}(x) = P\left(\frac{\lambda}{\sqrt{m}} S_m - \sqrt{m} \leq x\right)$$

$$= P\left(S_m \leq \frac{\sqrt{m}}{\lambda}(x + \sqrt{m})\right)$$

$$= F_{S_m}\left(\frac{\sqrt{m}}{\lambda}(x + \sqrt{m})\right)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_{W_m}(x) = F_{S_m}\left(\frac{\sqrt{m}}{\lambda}x + \frac{m}{\lambda}\right)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 886134

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 31

Session : 2024

Épreuve de : Math Em Lyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

ainsi en dérivant on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_{W_m}(x) = \frac{\sqrt{m}}{\lambda} f_{S_m}\left(\frac{\sqrt{m}}{\lambda}x + \frac{n}{\lambda}\right)$$

f_{W_m} est une densité de W_m

7) a) $(Y_i)_{i=1, \dots, n}$ est une suite de variable aléatoire indépendantes et identiques admettant une espérance et une variance non nulle
D'après le théorème central-limite :

$$\frac{S_m - E(S_m)}{\sigma(S_m)} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \quad \text{avec } Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\text{on } \begin{cases} V(S_m) = \frac{n}{\lambda^2} \\ E(S_m) = \frac{n}{\lambda} \end{cases} \quad \text{d'après 3)}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \sigma(S_m) &= \frac{\sqrt{n}}{\lambda} \quad \text{et} \quad \frac{S_m - E(S_m)}{\sigma(S_m)} = \frac{1}{\sqrt{m}} \left(S_m - \frac{n}{\lambda} \right) \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{m}} S_m - \sqrt{n} \\ \frac{S_m - E(S_m)}{\sigma(S_m)} &= W_m \end{aligned}$$

donc $W_m \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ avec $Z \subset \mathcal{N}(0,1)$

~~7) b) Pas 7) a) $W_m \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ avec $Z \subset \mathcal{N}(0,1)$~~

~~donc $\forall x \in \mathbb{R} \lim_{m \rightarrow +\infty} (F_{W_m}(x)) = \phi(x)$ avec ϕ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$~~

~~$\forall x \in \mathbb{R} \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\int_{-\infty}^x f_{W_m}(t) dt \right) = \phi(x)$ la loi $\mathcal{N}(0,1)$~~

Partie 4 :

16) a) $\forall m \in \mathbb{N}^* \quad U_m = \ln \left(\frac{U_{m+1}}{U_m} \right)$

$$= \ln \left(\frac{(m+1)^{m+1} e^{-m+1} \sqrt{2\pi(m+1)}}{(m+1)!} \times \frac{n!}{n^m e^{-m} \sqrt{2\pi m}} \right)$$

$$= \ln \left(\frac{e^{-1}}{m+1} \times \sqrt{\frac{m+1}{m}} \times (m+1) \left(\frac{m+1}{m} \right)^m \right)$$

$$= \ln(e^{-1}) + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{m} \right) + m \ln \left(1 + \frac{1}{m} \right)$$

$$= -1 + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{m} \right) + m \ln \left(1 + \frac{1}{m} \right)$$

on $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{m} \right) = 0$

donc $\ln \left(1 + \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{3m^3} + o\left(\frac{1}{m^3}\right)$

$$m \ln \left(1 + \frac{1}{m} \right) = 1 - \frac{1}{2m} + \frac{1}{3m^2} + o\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

$$\text{et } \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{12n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\text{donc } -1 + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) =$$

