

Copie anonyme - n°anonymat : 886134



T6-00371

886134

Mat Appro

Code épreuve : 237

Nombre de pages : 36

Session : 2024

Épreuve de :

Mathématiques Approfondies EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 2:

1) a) γ - Arctan est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

1) b) on pose $\forall x > 0 \quad h(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\ \text{Arctan est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \end{array} \right.$$

donc par composition $x \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ est de

classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad h'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \text{Arctan}'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1} \right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad h'(x) = 0$$

h est constante sur $\mathbb{R}_+^*$
de plus : $h(1) = 2 \operatorname{Arctan}(1)$
 $= 2 \left(\frac{\pi}{4} \right)$

$$h(1) = \frac{\pi}{2}$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad h(x) = \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}}$$

1) c) D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 en 0 :

$$\operatorname{Arctan}(x) = \sum_{k=0}^1 \frac{x^k}{k!} \operatorname{Arctan}^{(k)}(0) + o(x)$$

$$= \operatorname{Arctan}(0) + x \left(\frac{1}{1+0} \right) + o(x)$$

$$\operatorname{Arctan}(x) = x + o(x) \quad \text{car} \quad \operatorname{Arctan}(0) = 0$$

donc $\boxed{\operatorname{Arctan}(x) \sim_{x \rightarrow 0} x}$

$$\begin{aligned} 2) \quad a) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) &= \frac{2}{\pi(e^{-x} + e^{-(-x)})} \\ &= \frac{2}{\pi(e^x + e^{-x})} \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = f(x)$$

donc f est paire

• étude de $\int_0^{+\infty} f(x) dx$:

Soit $y \in \mathbb{R}_+$

$$\int_0^y f(x) dx = \int_0^y \frac{2}{1+e^x+e^{-x}} dx$$

$$= \frac{2}{\pi} [\text{Arctan}(e^x)]_0^y$$

$$= \frac{2}{\pi} (\text{Arctan}(e^y) + \text{Arctan}(1))$$

$$= -\frac{2}{\pi} (\text{Arctan}(e^{-y})) + \frac{1}{2} \quad \text{car } \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{on } \lim_{y \rightarrow +\infty} (\text{Arctan}(e^{-y})) &= \lim_{y \rightarrow 0} (\text{Arctan}(y)) \\ &= \text{Arctan}(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\int_0^y f(x) dx \right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } \int_0^{+\infty} f(x) dx \text{ converge et vaut } \frac{1}{2}$$

de plus : f est paire

$$\text{donc } \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \text{ converge et vaut } 2 \int_0^{+\infty} f(x) dx = 1}$$

$$2) b) \quad (1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-x} > 0 \quad \text{et} \quad e^x > 0$$

$$\text{donc } \forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{e^x + e^{-x}} > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0$$

$$(2) \quad f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ car } \forall x \in \mathbb{R} \quad e^x + e^{-x} > 0$$

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \text{ converge et vaut } 1 \text{ d'après 2) a)}$$

Par (1), (2) et (3) : f peut être considérée comme une densité

3) on note F la fonction de répartition de X

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \lim_{y \rightarrow -\infty} \left[\text{Arctan}(e^{-t}) \right]_y^x$$

$$= \frac{2}{\pi} \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(-\text{Arctan}\left(\frac{1}{e^x}\right) + \text{Arctan}(e^{-y}) \right)$$

$$= \left(-\text{Arctan}\left(\frac{1}{e^x}\right) + \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{2}{\pi} \right)$$

$$= \left(\text{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{2}{\pi} \right)$$

c'est d'après 1) b):

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$$

$$\text{donc } \text{Arctan}(e^{-x}) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(e^x)$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(e^x)}$$

4) $U = F(X)$

a) F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = f(x)$$

on d'après 2) b) on a vu de $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0$

donc F est strictement croissante et continue
(car c'est une fonction de répartition) sur $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \text{Arctan}(e^x) \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \text{Arctan}(z) \right) = 0 \end{cases}$$

donc F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$

a) b) on pose G la fonction de répartition de U

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) = P(F(X) \leq x)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 886134

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 36

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Approfondies E DHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

• Si $x \leq 0$:

$$[F(X) \leq x] = \emptyset \quad \text{car } F \text{ est à valeurs dans }]0, 1[$$

$$\text{donc } G(x) = 0$$

• Si $x \geq 1$:

$$[F(X) \leq x] = \Omega \quad \text{car } F \text{ est à valeurs dans }]0, 1[$$

$$\text{donc } G(x) = 1$$

• Si $x \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned} G(x) &= P(X \leq F^{-1}(x)) \\ &= F(F^{-1}(x)) \end{aligned}$$

$$G(x) = x$$

$$\text{finalement : } \forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \in]0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{donc } \boxed{G \in \mathcal{U}(]0, 1[)}$$

4) c) Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times]0, 1[$ tel que $F(x) = y$

$$F(x) = y \Leftrightarrow \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(e^x) = y$$

$$\Leftrightarrow \text{Arctan}(e^x) = \frac{\pi}{2} y$$

$$\Leftrightarrow e^x = \tan\left(\frac{\pi}{2} y\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} y\right)\right)$$

donc $\boxed{\forall x \in]0, 1[\quad F^{-1}(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} y\right)\right)}$

$$U = \text{rd.random}()$$

$$X = \text{mp.log}(\text{mp.tan}(\text{mp.pi}/2 * U))$$

5) a) x admet une espérance $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ converge

$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} x f(x) dx$ converge car $x \mapsto x f(x)$ est impaire car f est paire

$$\text{on } \int_0^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{2x}{\pi(e^x + e^{-x})} dx$$

Soit $g \in \mathbb{R}_+$
on pose :

$$u(x) = \text{Arctan}(e^{-x}) \quad v(x) = x$$

$$u'(x) = \frac{-1}{e^x + e^{-x}} \quad v'(x) = 1$$

u et v sont de classe

$x \mapsto \frac{2x}{\pi(e^{-x} + e^x)}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$

de plus $\lim_{x \mapsto +\infty} \left(\frac{2x^3}{\pi(e^{-x} + e^x)} \right) = 0$ par croissance comparée

donc $x f(x) \underset{x \mapsto +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

on $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est une intégrale de Riemann convergente

donc par comparaison: $\int_1^{+\infty} x f(x) dx$ converge
donc: $\int_0^{+\infty} x f(x) dx$ converge

donc X admet une espérance

Par plus $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

$$\boxed{E(X) = 0}$$

Com $x \mapsto x f(x)$ est impaire

5) b) X^2 admet une espérance $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge car
 $x \mapsto x^2 f(x)$ est paire

$$\text{on } \int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{2x^2}{\pi(e^{-x} + e^x)} dx$$

$x \mapsto x^2 f(x)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$

on $\lim_{x \mapsto +\infty} \left(x^4 f(x) \right) = \lim_{x \mapsto +\infty} \left(\frac{2x^4}{\pi(e^{-x} + e^x)} \right) = 0$ par croissance comparée

donc $x^2 f(x) \underset{x \mapsto +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

on $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est une intégrale de Riemann convergente

Par comparaison: $\int_1^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge, donc $\int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge

X^2 admet une espérance

af/

6) a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$
 On pose $u = mt$ (changement de variable affine)

$$t = \frac{u}{m} \quad \text{car } m > 0$$

$$dt = \frac{1}{m} du$$

$$\begin{cases} \text{Si } t \rightarrow +\infty & \text{alors } u \rightarrow +\infty \\ \text{Si } t = 0 & \text{alors } u = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-mt} dt \quad \text{converge} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{m}\right)^2 e^{-u} \left(\frac{1}{m}\right) du \quad \text{converge}$$

$$\text{on} \quad \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{m}\right)^2 e^{-u} \frac{1}{m} du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{m^3} u^2 e^{-u} du$$

$$= \frac{1}{m^3} \Gamma(3)$$

$$= \frac{1}{m^3} 2!$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{m}\right)^2 e^{-u} \frac{1}{m} du = \frac{2}{m^3}$$

$$\text{donc} \quad \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{m}\right)^2 e^{-u} \frac{1}{m} du \quad \text{converge}$$

$$\text{donc} \quad \int_0^{+\infty} t^2 e^{-mt} dt \quad \text{converge}$$

$$\text{et} \quad \int_0^{+\infty} t^2 e^{-mt} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{m}\right)^2 e^{-u} \frac{1}{m} du$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^2 e^{-mt} dt = \frac{2}{m^3}}$$

6) b) Soit $p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t} dt = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} \sum_{k=0}^p (-1)^k e^{-2kt} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} \sum_{k=0}^p (-e^{-2t})^k dt$$

Copie anonyme - n°anonymat : 886134

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 36

Session : 2024

Épreuve de :

mathématiques approfondies EDEEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k e^{-(2k+1)t} dt = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} \left(\frac{1 - (-1)^{p+1} e^{-2t(p+1)}}{1 + e^{-2t}} \right) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} \left(\frac{1 + (-1)^p e^{-2t(p+1)}}{1 + e^{-2t}} \right) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^k e^{-t}}{1 + e^{-2t}} + \frac{t^k (-1)^p e^{-t(2p+3)}}{1 + e^{-2t}} \right) dt$$

$$\text{on } 1 + (-1)^p \int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{e^t + e^{-t}} dt + \int_0^{+\infty} \frac{t^k (-1)^p e^{-t(2p+3)}}{1 + e^{-2t}} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-t}}{e^{-t}(e^t + e^{-t})} dt + \int_0^{+\infty} \frac{t^k (-1)^p e^{-t(2p+3)}}{1 + e^{-2t}} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-t}}{1 + e^{-2t}} dt + \int_0^{+\infty} \frac{t^k (-1)^p e^{-t(2p+3)}}{1 + e^{-2t}} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^k e^{-t}}{1 + e^{-2t}} + \frac{t^k (-1)^p e^{-t(2p+3)}}{1 + e^{-2t}} \right) dt$$

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad 1 + (-1)^p \int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} dt = \sum_{k=0}^p (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k e^{-(2k+1)t} dt$$

d'après la
relation
établie
avant

$$6) c) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N} \quad t^k \geq 0 \quad e^{-(2p+3)t} > 0 \quad \text{et} \quad 1 + e^{-2t} > 0$$

donc $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} \geq 0$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} dt \geq 0 \quad (1)$$

de plus : $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad 1 + e^{-2t} \geq e^{-2t} > 0$ car $e^{-2t} > 0$

$$\frac{1}{1 + e^{-2t}} \leq \frac{1}{e^{-2t}} \quad \text{car } u \mapsto \frac{1}{u} \text{ est}$$

décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall p \in \mathbb{N} \quad \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} \leq \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{e^{-2t}} \quad \text{car } \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad t^2 \geq 0 \text{ et } e^{-(2p+3)t} > 0$$

donc $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall p \in \mathbb{N} \quad \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} \leq t^2 e^{-(2p+1)t}$

on $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2p+1)t} dt$ converge par 6)a) car $2p+1 > 0$

et vaut $\frac{2}{(2p+1)^3}$

donc par croissance de l'intégrale :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} dt \leq \frac{2}{(2p+1)^3} \quad (2)$$

Par (1) et (2) :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} dt \leq \frac{2}{(2p+1)^3}$$

on $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{(2p+1)^3} \right) = 0$

Par encadrement :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} dt \right) = 0$$

$$6)d) \lim_{p \rightarrow +\infty} \left((1-\frac{1}{2})^p \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} dt \right)$$

$$= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} dt \right) =$$

$$= 0$$

$$\text{donc} \lim_{p \rightarrow +\infty} \left((1-\frac{1}{2})^p \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} dt \right) = 0$$

Par 6)b) :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^p (1-\frac{1}{2})^k \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t} dt \right) = I$$

$$\text{donc} \sum_{k=0}^{+\infty} (1-\frac{1}{2})^k \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t} dt \quad \text{et} :$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (1-\frac{1}{2})^k \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t} dt = I$$

$$\text{or} \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t + e^{-t}} dt = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} E(x^2) \right) \quad \text{car } x \mapsto x^2 f(x) \text{ est}$$

$$= \frac{\pi}{n} E(x^2)$$

$$= \frac{\pi}{n} V(X) \quad \text{car } E(X) = 0 \text{ donc } V(X) = E(X^2)$$

$$\text{donc} \quad V(X) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} (1-\frac{1}{2})^k \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t} dt$$

de plus, on a $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t} dt = \frac{2}{(2k+1)^3}$ par 6/a)

donc $V(X) = \frac{\pi}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^k}{(2k+1)^3}$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi^3}{32} \right)$$

$$V(X) = \frac{\pi^4}{64}$$

7) a) $Y = e^X$ soit G la fonction de répartition de Y
 (j'ai pris G aussi tout à l'heure pour U
 mais ce n'est pas la même fonction)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) = P(e^X \leq x)$$

• Si $x \leq 0$:

$$[e^X \leq x] = \emptyset$$

$$\text{donc } G(x) = 0$$

• Si $x > 0$:

$$G(x) = P(X \leq \ln(x)) \quad \text{car } u \mapsto \ln(u) \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$= F(\ln(x))$$

$$= \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(e^{\ln(x)})$$

$$G(x) = \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 886134

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 36

Session : 2024

Épreuve de :

Mathématiques Approfondies EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} (G(x)) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (G(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{\pi} \arctan(x) \right) = \frac{2}{\pi} \arctan(0) = 0 \end{cases}$$

donc G est continue en 0

G est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

de plus : G est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ (2)

Par (1) et (2) : Y est variable aléatoire à densité

$$f) \bullet \forall x \in \mathbb{R} \quad G_m(x) = P(\max_{1 \leq i \leq m} (Y_i) \leq x)$$

$$= P\left(\bigcap_{i=1}^m (Y_i \leq x)\right)$$

$$= \prod_{i=1}^m P(Y_i \leq x) \quad \text{car } Y_1, \dots, Y_m \text{ sont indépendantes}$$

$$= \prod_{i=1}^m G(x)$$

$$= (G(x))^m$$

donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad G_m(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi} \text{Arctan}(x)\right)^m & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

7)c) Soit Z_m la fonction de répartition de $\left(\frac{m}{M_m}\right)$
 $M_m(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ donc $\left(\frac{m}{M_m}\right)(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_- \quad Z_m(x) = 0$
 $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad Z_m(x) = P\left(\frac{m}{M_m} \leq x\right)$

$$= P\left(\frac{1}{M_m} \leq \frac{x}{m}\right) = P\left(M_m \geq \frac{m}{x}\right)$$

$$= 1 - P\left(M_m < \frac{m}{x}\right)$$

$$= 1 - G_m\left(\frac{m}{x}\right) \quad \text{car } M_m \text{ est à densité}$$

$$\begin{cases} \frac{m}{x} > 0 & (\Rightarrow) x > 0 \\ \frac{m}{x} \leq 0 & (\Rightarrow) x \leq 0 \end{cases}$$

donc $Z_m(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{m}{x}\right)\right)^m & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

on par 1) b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{m}{x}\right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{x}{m}\right)\right)$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad Z_m(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{x}{m}\right)\right)^m & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{on } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{n} \right) = 0 \quad \text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\text{Anckam} \left(\frac{x}{n} \right) \right) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

• Si $x > 0$:

$$\text{alors } Z_n(x) = 1 - e^{n \ln \left(1 - \text{Anckam} \left(\frac{x}{n} \right) \right)}$$

$$\text{on } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\text{Anckam} \left(\frac{x}{n} \right) \right) = 0$$

$$\text{donc } \ln \left(1 - \text{Anckam} \left(\frac{x}{n} \right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} - \text{Anckam} \left(\frac{x}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} - \frac{x}{n}$$

$$\text{donc } n \ln \left(1 - \text{Anckam} \left(\frac{x}{n} \right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -x$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(e^{n \ln \left(1 - \text{Anckam} \left(\frac{x}{n} \right) \right)} \right) = e^{-x}$$

$$\forall x > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (Z_n(x)) = 1 - e^{-x}$$

• Si $x \leq 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (Z_n(x)) = 0$$

donc finalement :

$$\frac{n}{n_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \quad \text{avec } Z \in \mathcal{E}(1)$$

Exercice 1 :

$m \geq 2$

1) Soit C_i la i -ème colonne de I_m (avec $i \in [1, m]$)

$$\text{donc } \text{rg}(I_m) = \dim(\text{Vect}(C_1, \dots, C_m))$$

$$= \dim(\text{Vect}(C_1))$$

$$\text{car } \forall i \in [1, m] \ C_i = C_1$$

$$\boxed{\text{rg}(I_m) = 1}$$

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{m,1}(\mathbb{R})$$

$$\text{donc } I_m X = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{m,1}(\mathbb{R})$$

$$\begin{cases} X \neq 0 \\ I_m X = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } I_m}$$

on note E_0 le sous-espace propre de I_m associé à la valeur propre 0
d'après le théorème du rang :

$$\dim(E_0) + \text{rg}(I_m) = m$$

$$\boxed{\dim(E_0) = m-1}$$

$$1)e) \quad I_m V_m = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ \vdots \\ m \end{pmatrix} = m V_m$$

$$\begin{cases} V_m \neq 0 \\ I_m V_m = m V_m \end{cases}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 886134

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 36

Session : 2024

Épreuve de :

Mathématiques approfondies EHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

donc V_m est vecteur propre de I_m associé à la valeur propre m

1) c) m est valeurs propre de I_m
on pose E_m le sous-espace propre de I_m associé à la valeur propre m

donc $\dim(E_m) \geq 1$

or d'après 1) $\dim(E_0) = m - 1$

donc $\dim(E_0) + \dim(E_m) \geq m$

on $\dim(E_0) + \dim(E_m) = m$

donc $\mathcal{S}_p(I_m) = \{0, m\}$

$$2) \quad \forall x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \quad J_m(x) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k^2 - \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k \right)^2$$

$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in [1, m] \quad x_1, \dots, x_m \mapsto \frac{1}{m} x_i^2 \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}^m \text{ (polynôme)} \\ \text{Par somme : } x_1, \dots, x_m \mapsto \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k^2 \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}^m \end{array} \right.$

de plus : $\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in [1, m] \quad x_1, \dots, x_m \mapsto \frac{1}{m} x_i \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}^m \text{ (polynôme)} \\ \text{Par somme } x_1, \dots, x_m \mapsto \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}^m \end{array} \right.$

de plus $u(t) u^2$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ (polynôme)

Par composition:

$x_1, \dots, x_n(t) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)^2$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$

Finalement, par Somme: f_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$

3) a) $\forall i \in [1, m]$

$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\partial_i f_n(x) = \frac{2}{n} x_i - 2 \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall i \in [1, m] \\ \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \end{array} \quad \partial_i f_n(x) = \frac{2}{n} \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)}$$

3) b) Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$(x_1, \dots, x_m)$ sont les points critique de f_n

$$(\Rightarrow) \forall i \in [1, m] \quad \partial_i f_n(x) = 0$$

$$(\Rightarrow) \forall i \in [1, m] \quad \frac{2}{n} \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) = 0$$

$$(\Rightarrow) \forall i \in [1, m] \quad x_i - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = 0$$

$$(\Rightarrow) \forall i \in [1, m] \quad x_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} x_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \\ x_1 = \dots = x_m \end{cases}$$

donc les points critiques de f_m sont les points critiques de la forme $(a, \dots, a) \in \mathbb{R}^n$

ii) a) Soit $(i, j) \in [1, m]^2$ et $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^n$

• Si $i = j$:

$$\forall x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^n \quad \partial_{i,j}^2 f_m(x) = \frac{2}{m} \left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

• Si $i \neq j$:

$$\forall x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^n \quad \partial_{i,j}^2 f_m(x) = -\frac{2}{m^2}$$

$$ii) b) \quad \frac{2}{m^2} (mI_m - J_m) = \frac{2}{m^2} \begin{pmatrix} m-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & m-1 & & \\ \vdots & -1 & \ddots & \\ -1 & \vdots & & m-1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{2}{m^2} (mI_m - J_m) = \begin{pmatrix} \frac{2(m-1)}{m^2} & & & -\frac{2}{m^2} \\ & \ddots & & \\ -\frac{2}{m^2} & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots \\ -\frac{2}{m^2} & & & \frac{2(m-1)}{m^2} \end{pmatrix}$$

on d'après ii) a) :

$$\nabla^2 f_m(a, \dots, a) = \begin{pmatrix} \frac{2}{m} \left(1 - \frac{1}{m}\right) & & & -\frac{2}{m^2} \\ & \ddots & & \\ -\frac{2}{m^2} & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots \\ -\frac{2}{m^2} & & & \frac{2}{m} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2(m-1)}{m^2} & & & -\frac{2}{m^2} \\ & \ddots & & \\ -\frac{2}{m^2} & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots \\ -\frac{2}{m^2} & & & \frac{2(m-1)}{m^2} \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{\nabla^2 f(a, \dots, a) = \frac{2}{m^2} (m I_m - J_m)}$

4)d) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

λ est valeur de $\nabla^2 f(a, \dots, a) \Leftrightarrow (\nabla^2 f(a, \dots, a) - \lambda I_m)$ est non inversible

$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{m^2} (m I_m - J_m) - \lambda I_m \right)$ est non inversible

$\Leftrightarrow \left(-\frac{2}{m^2} J_m + \left(\frac{2}{m} - \lambda \right) I_m \right)$ est non inversible

$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{m^2} J_m - \left(\frac{2}{m} - \lambda \right) I_m \right)$ est non inversible

$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{m} - \lambda \right) \in \text{Sp} \left(\frac{2}{m^2} J_m \right)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{m} - \lambda \right) \in \left[0, \frac{2}{m} \right]$ par 1)

$\Leftrightarrow \frac{2}{m} - \lambda = 0$ ou $\frac{2}{m} - \lambda = \frac{2}{m}$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{m}$ ou $\lambda = 0$

donc $\boxed{\text{Sp}(\nabla^2 f(a, \dots, a)) = \left\{ \frac{2}{m}, 0 \right\}}$

donc $\boxed{\text{Sp}(\nabla^2 f(a, \dots, a)) \subset \mathbb{R}_+, \text{ on ne peut pas conclure car } 0 \in \text{Sp}(\nabla^2 f(a, \dots, a))}$

5)a) Soit $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$\forall (z, y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad | \langle z, y \rangle | \leq \|z\| \times \|y\|$

Copie anonyme - n°anonymat : 886134

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 36

Session : 2024

Épreuve de :

Mathématiques approfondies EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

donc $\langle z, y \rangle^2 \leq \|y\|^2 \times \|z\|^2$

on pose $z = (x_1, \dots, x_m)$

et $y = (1, \dots, 1)$ alors :

$$\left(\sum_{k=1}^m 1 \cdot x_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^m 1^2 \right) \left(\sum_{k=1}^m x_k^2 \right)$$

$$\boxed{\forall (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \quad \left(\sum_{k=1}^m x_k \right)^2 \leq m \sum_{k=1}^m x_k^2}$$

5) b) $\forall x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \quad f_m(x) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k^2 - \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k \right)^2$

on $\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k^2 \geq \frac{1}{m^2} \left(\sum_{k=1}^m x_k \right)^2$ d'après 5) a)
(en multipliant
par $\frac{1}{m^2}$ de
chaque côté)

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k^2 - \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k \right)^2 \geq 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad f_m(x) \geq 0$

donc f_m admet un minimum global

de plus $a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ d'après 3) b), les points critiques de f

$$\text{donc } f_n(a, \dots, a) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a \right)^2$$

$$= \frac{na^2}{n} - \left(\frac{na}{n} \right)^2$$

$$= a^2 - a^2$$

$$f_n(a, \dots, a) = 0$$

donc le minimum est atteint en chaque point critique de f_n

$$b) n=2 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f_2(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \left(\frac{1}{2}(x+y) \right)^2$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{4}(x^2 + 2xy + y^2)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{4}y^2$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}xy$$

def $f = z(x, y) :$

$$z = \left(\frac{1}{4}\right) * x * x + \left(\frac{1}{4}\right) * y * y - \left(\frac{1}{2}\right) * x * y$$

return z

6) b) C'est la surface z la bonne car on observe un minimum global en 0 qu'il n'y a pas les autres figures

Exercice 3:

Partie I: $p \in \mathbb{N}^*$

$$1) \quad \forall x \in E, \forall i \in [1, p] \quad \langle u_i, x \rangle \in \mathbb{R} \quad \text{et } \lambda_i \in \mathbb{R}^* \\ \text{et } u_i \in E$$

$$\text{donc } \forall i \in [1, p] \quad \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i \in E$$

Par somme:

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i \in E$$

$$\forall x \in E \quad f(x) \in E \quad (1)$$

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$f(\lambda x + y) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, \lambda x + y \rangle u_i$$

$$= \sum_{i=1}^p \lambda_i (\lambda \langle u_i, x \rangle + \langle u_i, y \rangle) u_i$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i + \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, y \rangle u_i$$

$$= \lambda f(x) + f(y)$$

f est linéaire (2)

Par (1) et (2): f est un endomorphisme (i)

$$\begin{aligned} \text{de plus: } \forall (x, y) \in E^2 \quad \langle f(x), y \rangle &= \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle \langle u_i, y \rangle \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, y \rangle \langle u_i, x \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, y \rangle u_i, x \right\rangle \end{aligned}$$

$$= \langle f(y), x \rangle$$

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle \quad (ii)$$

Par (i) et (ii) : f est un endomorphisme symétrique

2) Soit $\forall i \in [1, m] \lambda_i = 1$

$$\text{donc } \forall x \in E \quad f(x) = \sum_{i=1}^p \langle u_i, x \rangle u_i$$

$$\forall x \in E \quad f(x) = x \quad \text{car } (u_1, \dots, u_p) \text{ est une base orthogonale}$$

$$\text{donc } \boxed{\begin{array}{l} \text{Si } \forall i \in [1, m] \lambda_i = 1 \\ \text{alors } f = \text{id}_E \end{array}}$$

$$\text{donc d'après le cours : } \forall x \in E \quad x = \sum_{i=1}^p \langle u_i, x \rangle u_i$$

3) a) Soit $x \in E$

$$x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in [1, p] \quad \lambda_i \langle u_i, x \rangle = 0 \quad \text{car } (u_1, \dots, u_p) \text{ est une base de}$$

$$(0) \quad \forall i \in [1, p] \quad \langle u_i, x \rangle = 0 \quad \text{car } \forall i \in [1, m] \quad E \quad \lambda_i \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in [1, p] \quad x \perp u_i$$

$$\Leftrightarrow x \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)^\perp$$

$$\text{donc } \boxed{\text{Ker}(f) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)^\perp}$$

on sait que d'après cours que :

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)^\perp \oplus \text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \dim(E)$$

$$\text{on } \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)) = p \quad \text{car } (u_1, \dots, u_p) \text{ est une base}$$

$$\text{donc } \boxed{\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E) - p}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 886134

Emplacement QR Code	Code épreuve : 297	Nombre de pages : 36	Session : 2024
	Épreuve de : Mathématiques Approfondies ED HEC		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

3) b) D'après le théorème du rang :

$$\dim(\ker(f)) + \operatorname{rg}(f) = \dim(E)$$
$$\operatorname{rg}(f) = \dim(E) - (\dim(E) - p) \quad \text{d'après 3) a)}$$
$$\boxed{\operatorname{rg}(f) = p}$$

de plus $\boxed{\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_p)}$ d'après ce qu'on a fait en 3) a)

i) Soit $i \in [1, m]$

$$f(u_i) = \sum_{j=1}^p \lambda_j \langle u_i, u_j \rangle u_j$$
$$\forall i \in [1, m] \quad f(u_i) = \lambda_i u_i \quad \text{car } (u_1, \dots, u_p) \text{ est orthogonale}$$

donc $\boxed{\lambda_1, \dots, \lambda_p \text{ sont des valeurs propres de } f \text{ associées respectivement à } u_1, \dots, u_p}$

25/36

Partie 2:

6) $\forall x \in E$

$$\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x) \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \lambda_i \lambda_j \langle u_i, x \rangle \langle u_j, x \rangle \langle u_i, u_j \rangle$$

$$\boxed{\forall x \in E \quad \|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \langle u_i, x \rangle^2}$$

car $(u_1, \dots, u_p)$ est une base orthogonale

De plus $k = \sqrt{\sum_{i=1}^p \lambda_i^2}$

on $\forall i \in [1, p] \quad \langle u_i, x \rangle^2 \leq \|x\|^2$

7) a) on pose $\mathcal{P}(n) : \|x_n\| \leq k^n \|x_0\|$

$$\|x_0\| \leq k^0 \|x_0\|$$

 $\mathcal{P}(0)$ est vraieSupposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$:

$$\|x_n\| \leq k^n \|x_0\|$$

on $\|x_{n+1}\| = \|f(x_n)\|$

on par 6): $\|f(x_n)\| \leq k \|x_n\|$

et $k \|x_n\| \leq k k^n \|x_0\|$ par hypothèse de récurrence

donc $\|x_{n+1}\| \leq k^{n+1} \|x_0\|$

 $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie

f) $\mathcal{P}(0)$ est vraie

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}(m) \Rightarrow \mathcal{P}(m+1)$$

Par récurrence, $\forall m \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}(m)$ est vraie

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N} \quad \|x_m\| \leq k^m \|x_0\|}$$

7) b) $k < 1$

de plus $\forall i \in \{1, \dots, p\} \quad x_i^2 > 0$ car $\lambda_i \in \mathbb{R}^*$

donc $\sum_{i=1}^p \lambda_i > 0$

$$k > 0$$

donc $0 < k < 1$

$$|k| < 1$$

donc $\lim_{m \rightarrow +\infty} (k^m) = 0$

on par 7) a) $\forall m \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \|x_m\| \leq k^m \|x_0\|$ car une norme est toujours positive

Par encadrement $\boxed{\lim_{m \rightarrow +\infty} (x_m) = 0}$

donc $\lim_{m \rightarrow +\infty} (\|x_m\|) = 0$ car $\forall x \in E \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

donc $\boxed{\text{la suite } (x_m)_{m \in \mathbb{N}} \text{ converge vers le vecteur nul de } E}$

7) c) Par 7) a) $\forall m \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \|x_m\| \leq k^m \|x_0\|$

on $|k| < 1$ comme nous l'avons vu
donc $\sum_{n \geq 0} k^n$ converge, donc $\sum_{n \geq 0} k^n \|x_0\|$ converge

Par comparaison: $\boxed{\sum_{n \geq 0} \|x_n\| \text{ converge}}$

Problème :

Partie I :

I) a) $\forall m \in \mathbb{N}$

$$U_{m+1} - U_m = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^{m+1}} dt - \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^m} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1 - (1+t^2)}{(1+t^2)^{m+1}} dt$$

$$U_{m+1} - U_m = \int_0^1 \frac{-t^2}{(1+t^2)^{m+1}} dt$$

$$\text{on } \forall t \in [0, 1] \quad 1+t^2 > 0$$

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad (1+t^2)^m > 0$$

$$\forall t \in [0, 1] \quad \frac{1}{(1+t^2)^{m+1}} > 0$$

$$\text{on } \forall t \in [0, 1] \quad -t^2 \leq 0$$

$$\text{donc } \forall t \in [0, 1] \quad -\frac{t^2}{(1+t^2)^{m+1}} \leq 0$$

de plus $t \mapsto \frac{t^2}{(1+t^2)^{m+1}}$ est continue sur

Par croissance de l'intégrale :

$[0, 1]$, donc :
 $\int_0^1 \frac{-t^2}{(1+t^2)^{m+1}} dt$ existe

$$\forall m \in \mathbb{N} : U_{m+1} - U_m \leq 0$$

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad U_{m+1} \leq U_m$$

$(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est décroissante

de plus, $\forall t \in [0, 1] \quad (1+t^2) > 0$

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad (1+t^2)^m > 0$$

Copie anonyme - n°anonymat : 886134

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 36

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

donc $\forall t \in [0, 1] \quad \frac{1}{(1+t^2)^n} \geq 0$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} \geq 0$$

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N} \quad V_m \geq 0}$$

1) b) la suite $\forall (V_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est décroissante minorée

donc $\boxed{\text{la suite } (V_m)_{m \in \mathbb{N}} \text{ converge}}$

2) a) on pose $\forall x \in [0, 1] \quad g(x) = e^{x/2} - 1 - x$

g est de classe C^1 sur $[0, 1]$

$$\forall x \in [0, 1] \quad g'(x) = \frac{1}{2} e^{x/2} - 1$$

$$\text{on} \quad \forall x \in [0, 1] \quad \frac{1}{2} \geq \frac{x}{2} \geq 0$$

$$e^{1/2} \geq e^{x/2} \geq 1$$

$$\frac{1}{2} e^{1/2} \geq \frac{1}{2} e^{x/2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\forall x \in [0, 1] \quad \frac{1}{2} e^{1/2} - 1 \geq g'(x) \geq -\frac{1}{2}$$

$$\text{on } 3 > e > 2$$

$$2 > \sqrt{3} > e^{1/2} > \sqrt{2}$$

$$1 > \frac{1}{2} e^{1/2}$$

$$1 - 1 > \frac{1}{2} e^{1/2} - 1$$

$$\forall x \in [0, 1] \quad 0 > \frac{1}{2} e^{1/2} - 1 \geq g'(x)$$

donc g est décroissante

$$\text{donc } \forall x \in [0, 1] \quad g(x) \leq g(0)$$

$$\text{on } g(0) = 1 - 1 - 0 = 0$$

$$\forall x \in [0, 1] \quad g(x) \leq 0$$

$$\boxed{\forall x \in [0, 1] \quad e^{x/2} \leq 1 + x}$$

2) b) $\forall t \in [0, 1] \quad t^2 \in [0, 1]$ en posant $x = t^2$ à la question d'avant, on a :

$$\forall t \in [0, 1] \quad 0 \leq e^{t^2/2} \leq 1 + t^2$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq e^{-nt^2/2} \leq (1 + t^2)^{-n} \quad \text{car } u \mapsto u^n \text{ est croissante sur } [0, +\infty[$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0, 1] \quad \frac{1}{(1 + t^2)^n} \leq e^{-nt^2/2} \quad \text{car } u \mapsto \frac{1}{u} \text{ est décroissante sur }]0, +\infty[$$

de plus $t \mapsto e^{-nt^2/2}$ est continue

donc $\int_0^1 e^{-nt^2/2} dt$ existe, par croissance de l'intégrale :

$\forall m \in \mathbb{N}$

$$U_m \leq \int_0^1 e^{-\frac{mt^2}{2}} dt$$

2) c) Soit $m \in \mathbb{N}^*$

on pose $u = \sqrt{m}t$ (changement de variable affine)
 $t = \frac{u}{\sqrt{m}}$ car $m > 0$

$$dt = \frac{1}{\sqrt{m}} du$$

$$\begin{cases} \text{Si } t \rightarrow +\infty & \text{alors } u \rightarrow +\infty \\ \text{Si } t \rightarrow -\infty & \text{alors } u \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$\text{donc } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{mt^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) du$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{m}} e(u) du \quad \text{avec } e \text{ une densité de la loi } \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^* \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{mt^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{m}}} \quad \text{car } \int_{-\infty}^{+\infty} e(u) du = 1$$

2) d)

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_- \quad e^{-\frac{mt^2}{2}} > 0$$

$$\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{mt^2}{2}} dt \text{ converge car } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{mt^2}{2}} \text{ converge}$$

donc par croissance de l'intégrale:

$$\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{mt^2}{2}} dt \geq 0$$

de même $\forall t \in]1; +\infty[\quad e^{-\frac{mt^2}{2}} \geq 0$ et $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{mt^2}{2}} dt$ converge

$$\text{donc : } \int_1^{+\infty} e^{-\frac{mt^2}{2}} dt \geq 0$$

$$\text{donc } \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{mt^2}{2}} dt + \int_0^1 e^{-\frac{mt^2}{2}} dt + \int_1^{+\infty} e^{-\frac{mt^2}{2}} dt \geq \int_0^1 e^{-\frac{mt^2}{2}} dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{mt^2}{2}} dt \geq \int_0^1 e^{-\frac{mt^2}{2}} dt \geq U_m \quad \text{par 2)b)}$$

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \geq U_m \geq 0, \quad \text{par 2)c) et 1)e)}$$

$$\text{on } \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{m}} \right) = 0$$

Par encadrement:

$$\boxed{\lim_{m \rightarrow +\infty} (U_m) = 0}$$

Partie 2.:

$$3) \quad t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^m} \quad \text{est continue et positive sur } [0; +\infty[$$

$$\frac{1}{(1+t^2)^m} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2m}}$$

$$\text{on } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2m}} dt \quad \text{est une intégrale de Riemann convergente car } 2m > 0$$

donc par équivalence:

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^m} dt \quad \text{converge} \quad \text{car } m > 0$$

$$\text{donc } \boxed{\forall m \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^m} dt \quad \text{converge}}$$

$$h)a) \quad \forall t \in [1; +\infty[\quad 1+t^2 \geq t^2 > 0$$

$$\forall t \in [1; +\infty[\quad 0 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2} \quad \text{car } u \mapsto \frac{1}{u} \text{ est décroissante sur }]0; +\infty[$$

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq \frac{1}{(1+t^2)^m} \leq \frac{1}{t^{2m}} \quad \text{car } u \mapsto u^m \text{ est croissante sur }]0; +\infty[$$

Copie anonyme - n°anonymat : 886134

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 36

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Par croissance de l'intégrale (toutes les intégrales convergent) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq I_n \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}} dt$$

$$\text{on} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}} dt = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[-\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)} \right]_1^y$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{(2n-1)y^{2n-1}} + \frac{1}{(2n-1)} \right)$$

$$= \frac{1}{(2n-1)} \quad \text{car} \quad \begin{matrix} 2n > 2 > 1 \\ 2n-1 > 0 \end{matrix}$$

$$\text{donc} \quad \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{(2n-1)}}$$

$$h) b) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2n-1} \right) = 0$$

Par encadrement par h) a) :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n) = 0}$$

$$4)c) \quad I_n = I_n + U_n$$

$$\text{on } \lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n) = 0 \quad \text{par 4)b)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n) = 0 \quad \text{par 2)d)}$$

donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n) = 0}$

$$5)a) \quad I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \quad t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n} \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+$$

Soit $y \in \mathbb{R}_+$
on pose :

$$u(t) = t$$

$$u'(t) = 1$$

$$w(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n}$$

$$w'(t) = -\frac{2nt}{(1+t^2)^{n+1}}$$

u et v sont de classe C^1 sur $[0, y]$, par intégrations par parties :

$$\int_0^y \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^y + 2n \int_0^y \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt$$

$$= \frac{y}{(1+y^2)^n} + 2n \int_0^y \frac{(t^2+1) - 1}{(1+t^2)^{n+1}} dt$$

$$= \frac{y}{(1+y^2)^n} + 2n \left(\int_0^y \frac{1}{(1+t^2)^n} dt - \int_0^y \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt \right)$$

$$\text{en } \frac{y}{(1+y^2)^n} \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{y}{y^{2n}} \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{y^{2n-1}}$$

on $\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y^{2m-1}} \right) = 0$ car $m \geq 1$ donc $2m-1 > 0$

et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^m} dt$ converge ainsi que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{m+1}} dt$

Par passage à limite quand $y \rightarrow +\infty$:

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad I_m = 2m (I_m - I_{m+1})$$

5)b) $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)} dt$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\text{Arctan}(t) \right]_0^y$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} (\text{Arctan}(y) - \text{Arctan}(0))$$

$$I_1 = \frac{\pi}{2}$$

3)c) $\forall m \in \mathbb{N}^* \quad \frac{I_m}{m} = 2(I_m - I_{m+1})$ par 5)a)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ $\sum_{k=1}^N \frac{I_k}{k} = 2 \sum_{k=1}^N (I_k - I_{k+1})$

$$= 2(I_1 - I_{N+1}) \quad \text{par télescopage}$$

on $\lim_{N \rightarrow +\infty} (I_{N+1}) = 0$

donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^N \frac{I_k}{k} \right) = 2I_1$

donc $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_k}{k}$ converge

et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{I_k}{k} = 2I_1 = \pi$ par 5)b)

5) d) def suite $J(n)$:

$$J = mp.pi/2$$

for k in range $(2, n+1)$:

$$J = (2 * m * J) / (2 * m - 1)$$

return J

6) on pose $P(n)$: " $J_{n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ "

$$J_1 = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2 \times 0}{0}}{4^0}$$

donc $P(0)$ est vraie

Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$

$$J_{n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$$

on $J_{n+2} = \frac{2(n+1) J_{n+1}}{2(n+1)-1}$ par 5) a)

$$= \frac{\pi}{2} \times \frac{2(n+1)}{2n+1} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \quad \text{par hypothèse de récurrence}$$

$$= \frac{\pi}{2} \times \frac{2n!}{(n!)^2 4^n} \times \frac{2(n+1)}{2n+1}$$

=