

W7-00099
639515
Mat Appro



Code épreuve : 282

Nombre de pages : 16

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques approfondies ESSEC/HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$1) \forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, i \neq j$$

$$(P^t P)_{i,j} = \sum_{h=1}^n P_{i,h}^t P_{h,j} = \sum_{h=1}^n (P_{i,h}) P_{j,h}$$

$$= \sum_{h=1}^n (\delta_{i, \sigma(h)}) (\delta_{j, \sigma(h)})$$

Or, par définition du symbole de Kronecker,

$$\forall (h, i) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad \delta_{i, \sigma(h)} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq \sigma(h) \\ 1 & \text{si } i = \sigma(h) \end{cases}$$

σ réalise une bijection dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ donc $\exists ! h \in \llbracket 1; n \rrbracket, \sigma(h) = i$ et $\exists ! l \in \llbracket 1; n \rrbracket, \sigma(l) = j$ où $h \neq l$

Ainsi, $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, i \neq j, (P^t P)_{i,j}$ est une somme de termes nuls donc vaut 0

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, (P^t P)_{i,i} = \sum_{h=1}^n (\delta_{i,h})^2$$

$$= 0 + 0 + \dots + 1 + 0 + \dots + 0 = 1 \quad (\text{en procédant de la même manière})$$

Ainsi, $P^t P = I_n$ donc P est orthogonale

De plus, $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$,

$$P_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$$

Je n'ai pas

2) Soit $Q \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de Hadamard

$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$,

$$\begin{aligned} (^tQQ)_{i,j} &= \sum_{h=1}^n {}^tQ_{i,h} Q_{h,j} \\ &= \sum_{h=1}^n Q_{h,i} Q_{h,j} \end{aligned}$$

Si $i = j$, on a bien $\sum_{h=1}^n (\pi)^2$ où $\pi \in \{-1; 1\}$

$$= n$$

Si $i \neq j$, ses vecteurs colonnes sont 2 à 2 orthogonaux et $\sum_{i=1}^n {}^tQ_{i,h} Q_{h,j}$ est le produit scalaire

de la i -ème colonne avec la j -ème colonne donc cette somme vaut 0

Ainsi, ${}^tQQ = n \cdot I_n$

De plus, $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $Q_{i,j} = \pi$ où $\pi \in \{-1; 1\}$
 et ainsi $Q_{i,j}^2 = 1$, $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$

Donc Q est une matrice de Hadamard implique que ${}^tQQ = n I_n$ et $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $Q_{i,j} = 1$

De plus, si l'on suppose que $\forall (i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$,
 $({}^t Q Q)_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$ et que $Q_{i,j}^2 = 1$,

on en déduit grâce à la deuxième supposition que tous les termes de Q valent 1 ou -1

~~Q est bien une matrice carrée car lorsque l'on la multiplie par sa transposée, on~~

La première supposition nous permet de dire que ces vecteurs colonnes sont orthogonaux

Ainsi, Q est une matrice de Hadamard

$${}^t Q Q = n I_n \quad (\Leftrightarrow) \quad \forall (i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, Q_{i,j}^2 = 1$$

3) ${}^t H$ est évidemment une matrice carrée dont tous les coefficients valent 1 ou -1

La question 2) nous permet d'affirmer que

$${}^t H H = n I_n$$

Donc ${}^t ({}^t H H) = {}^t (n I_n)$

Donc ${}^t H ({}^t H) = n I_n$

Donc les vecteurs colonnes de H sont orthogonaux

Ainsi, ${}^t H$ est bien une matrice de Hadamard

$$4) \forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2,$$

$$(PH)_{i,j} = \sum_{h=1}^n P_{i,h} H_{h,j} = \sum_{h=1}^n \delta_{i, \sigma(h)} H_{h,j}$$

Donc pour l'unique $u \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\delta_{i, \sigma(u)} = 1$,

$$\text{on a } \delta_{i, \sigma(u)} H_{u,j} = H_{u,j} \text{ où } j \in \llbracket 1; n \rrbracket \\ = n \in \{1; -1\} \text{ par définition de } H$$

De plus, ${}^t(PH)PH = {}^tH^tPPH = {}^tHH = nI_n$ ce qui prouve que les vecteurs ^{colonnes} de PH sont orthogonaux

Et PH est évidemment carrée par produit

Donc PH est une matrice de Hadamard

De la même façon, les coefficients de HP valent 1 ou -1,

$${}^t(HP)HP = {}^tP^tHHP = n {}^tPP = nI_n$$

ce qui prouve que les vecteurs colonnes de HP sont orthogonaux

Donc HP est une matrice de Hadamard

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2,$$

$$(DH)_{i,j} = \sum_{h=1}^n D_{i,h} H_{h,j} = D_{i,i} H_{i,j} = ab \text{ où } (a,b) \in \llbracket -1; 1 \rrbracket^2 \\ \text{donc } ab \in \llbracket -1; 1 \rrbracket$$

Ainsi, les coefficients de DH valent 1 ou -1

DH est une matrice carrée

$${}^t(DH)DH = {}^tHD^2H \text{ où } D^2 = I_n \text{ (chaque terme mis au carré dans une matrice colonne)}$$

Donc ${}^t(DH)DH = nI_n$ donc les vecteurs colonnes de DH sont orthogonaux

Emplacement QR Code	Code épreuve : 282	Nombre de pages : 16	Session : 2024
	Épreuve de : Mathématiques Approfondies ESSEC/HEC		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Donc DH est une matrice de Hadamard

On procède de la même façon sans problème pour HD

Ainsi, PH , DH , HP , HD sont toutes des matrices de Hadamard

Soit M une matrice de Hadamard

$$6) \forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, i \neq j,$$

$$(*MM)_{i,j} = \sum_{k=1}^n *M_{i,k} M_{k,j} = 0$$

$$= \sum_{k=1}^n 1 + \sum_{k=2}^n (-1) = 0 \quad \text{car } n \text{ est le nombre de termes faisant } 1 \text{ et } -1$$

donc $n + n = n$

Ainsi, $n = 2u$ donc n est paire car si n est différent pour 1 et -1, le résultat ne peut pas s'annuler

11) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_h(\mathbb{R})$

$$\text{et } A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{1,1}B & \dots & A_{1,n}B \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1}B & \dots & A_{n,n}B \end{pmatrix}$$

* $A \otimes B$ est une matrice carrée (de taille $n \times n$)

* $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $A_{ij}B$ est une matrice contenant des vecteurs égaux à 1 ou -1 (-1 ou 1 multiplié par une matrice de Hadamard)

Donc en formant $A \otimes B$ on a bien des matrices de coefficients égaux à 1 ou -1,

$A \otimes B$ a donc tous ses coefficients égaux à 1 ou -1

* $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$,

$$\begin{aligned} ({}^t(A \otimes B) A \otimes B)_{ij} &= \sum_{h=1}^n ({}^t(A \otimes B))_{ih} (A \otimes B)_{hj} \\ &= \sum_{h=1}^n (A \otimes B)_{hi} (A \otimes B)_{hj} \\ &= \sum_{h=1}^n A_{hi} A_{hj} \end{aligned}$$

Je n'aboutis pas

13) On montre, par récurrence que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice de Hadamard de taille 2^m

Soit $(P_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$: "Il existe une matrice de Hadamard de taille 2^m "

Initialisation: La question 8 nous confirme

qu'il existe bien une matrice de taille 2.
Donc P_1 est vraie

Hérédité: Supposons $m \in \mathbb{N}^*$ tel que P_m est vérifiée.

$\exists M \in \mathcal{M}_{2^m}(\mathbb{R})$, M est une matrice de Hadamard

Soit N une matrice 2×2 de Hadamard (qui existe d'après la question 8)

$(M \otimes N)$ est de dimension $2^m \cdot 2 = 2^{m+1}$ et est bien de Hadamard (d'après la question précédente), ce qui achève la récurrence

Conclusion, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice de Hadamard dans $\mathcal{M}_{2^m}(\mathbb{R})$

Partie II

15) Symétrie: $\forall (u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2$

$$\begin{aligned} \langle u; v \rangle &= \sum_{h=1}^n p_h u_h v_h = \sum_{h=1}^n p_h v_h u_h \\ &= \langle v; u \rangle \end{aligned}$$

Bilinéarité: Soient u_1, u_2 et v dans $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \langle \lambda u_1 + u_2; v \rangle &= \sum_{h=1}^n (\lambda u_{1h} + u_{2h}) v_h p_h \\ &= \lambda \sum_{h=1}^n u_{1h} v_h p_h + \sum_{h=1}^n u_{2h} v_h p_h \\ &= \lambda \langle u_1; v \rangle + \langle u_2; v \rangle \end{aligned}$$

$\langle \cdot ; \cdot \rangle$ est donc linéaire pour la première variable, la symétrie nous indique qu'il l'est aussi pour la deuxième.

Positivité: Soit $u \in \mathbb{R}^n$

$$\langle u; u \rangle = \sum_{k=1}^n u_k^2 p_k$$

Or, $\forall k \in [1; n]$, p_k représente une probabilité donc $p_k \geq 0$

Donc par somme de termes positifs,

$$\langle u; u \rangle \geq 0$$

Définition: Soit $u \in \mathbb{R}^n$, $\langle u; u \rangle = 0$

$$\langle u; u \rangle = \sum_{k=1}^n u_k^2 p_k = 0$$

Donc par somme de termes positifs, $\forall k \in [1; n]$,

$$u_k^2 p_k = 0$$

l'énoncé a supposé que $P(A) \neq 0$ donc $p_k \neq 0$

$$\text{Donc } u_k^2 = 0 \Leftrightarrow u_k = 0$$

Finalement, $u = 0$

Donc l'application $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \langle x; y \rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 16

Session : 2024

Épreuve de : *Mathématiques approfondies ESSEC/HEC*

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

16) Soit $i \in \llbracket 1; l \rrbracket$.

On résout :

$$\begin{cases} E(a_i Z_i + b_i) = 0 \\ V(a_i Z_i + b_i) = 1 \end{cases} \stackrel{(*)}{=} \begin{cases} a_i = \frac{-b_i}{E(Z_i)} \text{ par linéarité de l'espérance} \\ V(a_i Z_i) = 1 \end{cases}$$

$$\stackrel{(**)}{=} \begin{cases} a_i = \sqrt{\frac{1}{V(Z_i)}} \\ b_i = -a_i E(Z_i) \end{cases}$$

Ainsi, par unicité de la variance et de l'espérance, il existe un unique couple $(a_i, b_i) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$,

$$\underline{E(a_i Z_i + b_i) = 0 \text{ et } V(a_i Z_i + b_i) = 1}$$

17)

$$\langle v; \mu_0 \rangle = \sum_{h=1}^n v_h p_h = \sum_{h=1}^n P(\{\omega_h\}) V(\omega_h)$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(V = x) = P(\{\omega_h\})$ si V prend la valeur x lorsque ω_h se réalise.

Ainsi, $\langle \mu; \mu_0 \rangle = E(V)$ par définition de l'espérance

$$\begin{aligned}\langle v; w \rangle &= \sum_{h=1}^n IP(\{\omega_h\}) v_h w_h \\ &= \sum_{h=1}^n IP(\{\omega_h\}) V(\omega_h) W(\omega_h)\end{aligned}$$

Ainsi, de la même manière, $\forall h \in \mathbb{N}$, $V(\omega_h)$ et $W(\omega_h)$ représentent la valeur prise par les variables et $IP(\{\omega_h\})$ la probabilité

Donc $E(VW) = \langle v; w \rangle$ ✓

18) D'après la question précédente, $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, #0

$$\langle x_i; u_0 \rangle = E(X_i) = E(a_i Z_i + b_i) = 0$$

$$\langle x_i; x_i \rangle = E(X_i^2)$$

Or, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$E(X_i^2) = V(X_i) + (E(X_i))^2 = \underline{1}$$

$$\langle x_i; x_j \rangle = E(X_i X_j)$$

Or, l'indépendance des Z_i nous donne que X_i et X_j sont indépendantes

Donc $\langle x_i; x_j \rangle = E(X_i) E(X_j) = 0$

20) b) On commence par montrer la linéarité de T

Soit $(Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}_{m-1}^2[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T(\lambda Q_1 + Q_2) &= ((\lambda Q_1 + Q_2)(\alpha_1), \dots, (\lambda Q_1 + Q_2)(\alpha_n)) \\ &= \lambda (Q_1(\alpha_1), \dots, Q_1(\alpha_n)) + (Q_2(\alpha_1), \dots, Q_2(\alpha_n)) \\ &= \lambda T(Q_1) + T(Q_2) \end{aligned}$$

Donc T est linéaire

De plus, Soit $Q \in \mathbb{R}_{m-1}[x]$, $T(Q) = 0$

On a donc $(Q(\alpha_1), \dots, Q(\alpha_n)) = 0$

Donc $\forall i \in \{1; m\}$, $Q(\alpha_i) = 0$

Q admet donc m racines

Or, Q est de degré $m-1$

Donc Q est nul

Ainsi, Q est injectif

De plus, $\dim(\mathbb{R}_{m-1}[x]) = \dim(\mathbb{R}^m) = m$, ce qui nous donne directement la surjectivité

Donc Q est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{m-1}[x]$ dans $\mathbb{R}^m$

c) La question précédente nous indique donc que tout vecteur de $\mathbb{R}^m$ admet un antécédent Q où $(Q(\alpha_1), \dots, Q(\alpha_m))$ est égal à ce vecteur.

Ainsi, en prenant le vecteur $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$,

on sait qu'il en existe un antécédent Q

$$\text{et } E(Q(Z)) = \sum_{h=1}^m \beta_h P(Z = \alpha_h) = 0$$

En reprenant ce même polynôme et en constatant que d'après la question 17), $E(VU)$, on obtient

$$E(Q(Z)Z) = \sum_{h=1}^m \alpha_h \beta_h P(Z = \alpha_h) = 0$$

Partie III

23) Soient $x = (x_1, \dots, x_{n^2})$ et $y = (y_1, \dots, y_{n^2})$ dans $\mathbb{R}^{n^2}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ (on note $x+y = ((x+y)_1, \dots, (x+y)_{n^2})$)

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x + y) &= [(\lambda x + y)_{(i-1)n+j}]_{(i,j) \in [1;n]^2} \\ &= \lambda [x_{(i-1)n+j}]_{(i,j) \in [1;n]^2} + [y_{(i-1)n+j}]_{(i,j) \in [1;n]^2} \\ &= \lambda \varphi(x) + \varphi(y) \end{aligned}$$

Donc φ est linéaire

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|\varphi(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [x_{(i-1)n+j}]^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n^2} x_i^2}$$

$$= \|x\|$$

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 16

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques approfondies ESSEC/HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$24) \forall A \in M_n(\mathbb{R}),$$

$$\|A\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j}^2$$

$$\text{Or, } \forall (i,j) \in [1;n]^2,$$

$$\begin{aligned} (^tAA)_{i,j} &= \sum_{h=1}^n A_{i,h} A_{h,j} \\ &= \sum_{h=1}^n A_{h,i} A_{h,j} \end{aligned}$$

En particulier si $i=j$

$$(^tAA)_{i,i} = \sum_{h=1}^n A_{h,i}^2$$

$$\text{Donc } \text{Tr} (^tAA) = \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^n A_{h,i}^2 = \|A\|^2$$

$$\text{Donc } \boxed{\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \|A\|^2 = \text{Tr} (^tAA)}$$

$$\forall (i,j) \in [1;n]^2 \text{ on a:}$$
~~$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|^2 \geq$$~~

$$27) \forall x \in \mathbb{R}^{n^2},$$

$$F(\varphi(x)) \leq n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi(x)_{i,j}^2 \right)^{1/2} \text{ (d'après 25)}$$

$$\leq n \|\varphi(x)\|$$

$$\leq n \|x\|$$

Ainsi, $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{n^2})^2$,

$$|F(\varphi(x)) - F(\varphi(y))| \leq n \|x - y\|$$

28) (*) $\forall x \in \mathbb{R}^{n^2}$, l'application $y \mapsto \|x - y\|$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$ donc $y \mapsto n\|x - y\|$ en admet un aussi.

Ainsi, $\exists u \in \mathbb{R}^{n^2}, |F(\varphi(x)) - F(\varphi(u))| = \min_{u \in \mathbb{R}^{n^2}} |F(\varphi(x)) - F(\varphi(u))|$

Donc $F \circ \varphi$ admet un minimum global

(*) $F(\varphi)$ est

28) $F \circ \varphi$ est définie sur un ensemble fermé borné, à savoir K_n .

De plus, $\lim_{x \rightarrow y} n \|x - y\| = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow y} |F(\varphi(x)) - F(\varphi(y))| = 0$ (par encadrement car une valeur absolue est positive)

Donc $\lim_{x \rightarrow y} F(\varphi(x)) = F(\varphi(y))$

Ceci étant valable pour tout y dans $\mathbb{R}^{n^2}$,

$F \circ \varphi$ est continue sur K

Ainsi, $F \circ \varphi$ étant continue sur un ensemble fermé borné, cela suffit à dire que $F \circ \varphi$ admet un maximum et un minimum.

Donc F admet un maximum et un minimum sur $\mathcal{O}_n$

29) Pour A une matrice orthogonale, on a

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n A_{i,j}^2 \right)^{1/2} = \sum_{i=1}^n 1 = n$$

Or, la question 25) nous montre que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n A_{i,j}^2 \right)^{1/2} \leq F(A)$$

De plus, ce minimum est bien atteint en prenant par exemple $F(I_n)$

Donc $M_n = n$

34) On cherche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & \beta & \alpha & \beta & -\beta \\ \beta & \alpha & \beta & \beta & \alpha & \beta \\ -\beta & \beta & -\alpha & \beta - \beta & \alpha & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 + 2\beta^2 = 1 \\ 2\alpha\beta - \beta^2 = 0 \\ \beta^2 = 0 \\ 2\alpha\beta = 0 \\ 2\beta^2 + \alpha^2 = 1 \end{array} \right.$$

Donc $\beta = 0$ et $\alpha = 1$