



W7-00099
639515
Mat Appro

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 22

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1:

1) a) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$,

$$\text{Im}(I_n) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Donc $\text{rg}(I_n) = 1$

Ainsi, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(I_n)) = n-1$
Donc 0 est valeur propre et $\dim(E_0(I_n)) = n-1$

$$b) I_n V_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = n V_n$$

De plus, $V_n \neq 0_{M_n(\mathbb{R})}$

Donc V_n est vecteur propre de I_n

$$c) \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(f)} \dim E_\lambda(I_n) \leq n \text{ donc } n-1 + \dim(E_n(I_n)) \leq n$$

où $\dim(E_n(I_n)) \geq 1$
donc $\dim(E_n(I_n)) = 1$

Ainsi, $\dim(E_0(I_n)) + \dim(E_n(I_n)) = n$ donc I_n n'admet pas d'autres valeurs propres que 0 et n

$$\text{Donc } \mathcal{L}_p(\mathcal{I}_n) = \{0; n\}$$

2) f_n est une fonction polynômiale
 donc f_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$

3) a) $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$

$$\begin{aligned} \underline{D_i f_n(x_1, \dots, x_n)} &= \frac{2}{n} \cdot x_i - 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n x_h \\ &= \frac{2}{n} \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n x_h \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (x_1, \dots, x_n) \text{ est point critique } (\Leftrightarrow) & \begin{cases} D_1(f)(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ D_n(f)(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \\ (\Leftrightarrow) \begin{cases} \frac{2}{n} \left(x_1 - \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n x_h \right) = 0 \\ \frac{2}{n} \left(x_2 - \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n x_h \right) = 0 \\ \vdots \\ \frac{2}{n} \left(x_n - \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n x_h \right) = 0 \end{cases} & (\Leftrightarrow) \begin{cases} x_1 - \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n x_h = 0 \\ \vdots \\ x_n - \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n x_h = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

En soustrayant la première ligne aux autres, on obtient

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 - \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n x_h = 0 \\ x_2 - x_1 = 0 \\ x_3 - x_1 = 0 \\ \vdots \\ x_n - x_1 = 0 \end{cases} & (\Leftrightarrow) \begin{cases} x_1 - \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n x_h = 0 \\ x_1 = x_2 = \dots = x_n \end{cases} \end{aligned}$$

La deuxième ligne nous suffit pour conclure que

les points critiques de f_n sont les points de la forme $(a, a, \dots, a) \in \mathbb{R}^n$

4) a) $\forall (h, i) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $h \neq i$, $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\underline{d_{i,h}^2(f)(x) = -\frac{2}{n^2}}$$

$\forall h \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$\underline{d_{h,h}^2(f)(x) = \frac{2}{n} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{2(n-1)}{n^2}}$$

b) Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla^2(f_n)(x) = \begin{pmatrix} \frac{2(n-1)}{n^2} & & -\frac{1}{n^2} \\ & \ddots & \\ -\frac{1}{n^2} & & \frac{2(n-1)}{n^2} \end{pmatrix}$

$$= \frac{2}{n^2} (nI_n - J_n)$$

En particulier, si a est point critique,

$$\nabla^2(f_n)(a, \dots, a) = \frac{2}{n^2} (nI_n - J_n)$$

d) J_n est diagonalisable (car $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(J_n)} J_n = n$)

Donc il existe une matrice P inversible et une matrice $D = \text{diag}(0, \dots, 0, n)$ telles que $J_n = PDP^{-1}$

$$\text{Ainsi, } \nabla^2 f_n(a, \dots, a) = \frac{2}{n^2} (nPP^{-1} - PDP^{-1})$$

$$= P \left(\frac{2}{n} I - \frac{2}{n^2} D \right) P^{-1}$$

$$= PMP^{-1} \text{ où } M = \begin{pmatrix} \frac{2}{n} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \text{Sp}(M) = \left\{ \frac{2}{n}; 0 \right\}$$

M étant semblable à $\nabla^2 f_n(a, \dots, a)$,

$$\boxed{\text{Sp}(f_n(a, \dots, a)) = \left\{ \frac{2}{n}; 0 \right\}}$$

Or, le fait que $0 \in \underline{\text{Sp}(f_n(a, \dots, a))}$ nous

empêche de conclure quant aux éventuels extrema de f_n

5) a) Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $u = (1, \dots, 1)$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a:

$$0 \leq \left| \sum_{h=1}^n x_h \right| \leq \sqrt{\sum_{h=1}^n 1^2} \cdot \sqrt{\sum_{h=1}^n x_h^2}$$

par la croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+^n$,

$$\left(\sum_{h=1}^n x_h \right)^2 \leq n \sum_{h=1}^n x_h^2$$

6) a) def $f = 2(x, y)$:

$$Z = (1/2) * (x**2 + y**2) - ((1/2) * |x+y|)**2$$

return z

b) La surface n°1 car son minimum est atteint en ses points critiques

Exercice 2

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

b) Soit $D: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, D'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0 \end{aligned}$$

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 22

Session : 2024

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques approfondies EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

D est donc constante

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, D(x) = D(1) = 2 \arctan(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^+$,

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

c) On applique la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $u \mapsto \arctan(u)$ entre 0 et x à l'ordre 1.

$$\text{Ainsi, on a : } \arctan(x) \underset{0}{=} \arctan(0) + \frac{1}{1+0^2} \cdot (x-0) + o(x)$$

$$\arctan(x) \underset{0}{=} x + o(x)$$

$$\text{Donc } \arctan(x) \underset{0}{\sim} x$$

$$2) a) \frac{2x^2}{\pi(e^x + e^{-x})} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2x^2}{\pi e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ par croissance comparée}$$

Or, f est continue sur $\mathbb{R}$ et paire

$$\text{On a donc } \frac{2}{\pi(e^x + e^{-x})} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ où } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

$$\text{avec } \forall x \in [1, +\infty[\quad \frac{2}{\pi(e^x + e^{-x})} \geq 0 \text{ et } \frac{1}{x^2}$$

qui nous permet de conclure que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \text{ converge}$$

b) * f est positive sur $\mathbb{R}$

* f est continue sur $\mathbb{R}$

Soit $y > 0$. On pose $\frac{2}{\pi} \int_0^y \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\arctan(e^x) \right]_0^y = \frac{2}{\pi} \left(\arctan(e^y) - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{donc } \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^y \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ainsi, } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut 1

Donc f peut être considérée comme une densité

3) en posant $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x > y$ et $\int_y^x f(t) dt$, on a

$$\int_y^x f(t) dt = \frac{2}{\pi} \left(\arctan(e^x) - \arctan(e^y) \right) \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} \frac{2}{\pi} \arctan(e^x)$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(e^x)$$

4) a) * F est continue sur $\mathbb{R}$.

* F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (par composition de fonction strictement croissantes)

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

Donc F est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0; 1[$

b) $U(\Omega) =]0; 1[$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus]0; 1[$, $F_U(x) = 0$ où F_U est la fonction de répartition de U

$$\forall x \in]0; 1[,$$

$$P(U \leq x) = P\left(\frac{2}{\pi} \arctan(e^x) \leq x\right)$$

$$= P\left(\arctan(e^x) \leq \frac{\pi}{2} x\right)$$

$$= P\left(e^x \leq \tan\left(\frac{\pi}{2} x\right)\right) = P\left(x \leq \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} x\right)\right)\right)$$

$$= F\left(\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} x\right)\right)\right)$$

$$\text{Or, } \forall x \in]0; 1[,$$

$$F\left(\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} x\right)\right)\right) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(e^{\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} x\right)\right)}\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi x}{2} = x$$

$$\text{Donc finalement, } F_U(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in]0; 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $U \sim U(]0; 1[)$

c) Soit $y \in]0; 1[$ et $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{2}{\pi} \arctan(e^x) = y \Leftrightarrow \arctan(e^x) = \frac{\pi}{2} y \Leftrightarrow e^x = \tan\left(\frac{\pi}{2} y\right) \\ \Leftrightarrow x = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} y\right)\right)$$

On peut donc écrire le script suivant:

```

u = rd.random()
a = np.log(np.tan((np.pi/2)*u))
print a

```

S) a) $x \mapsto \frac{2x^3}{\pi(e^{-x} + e^x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Or, $\left| \frac{2x^3}{\pi(e^{-x} + e^x)} \right| \underset{+\infty}{\sim} \left| \frac{2x^3}{\pi e^x} \right| \underset{+\infty}{\rightarrow} 0$ par croissance comparée

Donc $\left| \frac{2x}{\pi(e^x + e^{-x})} \right| = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ où $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge

De plus, $\forall x \in [1; +\infty[$, $\left| \frac{2x}{\pi(e^x + e^{-x})} \right| \geq 0$ et $\frac{1}{x^2} \geq 0$

La parité de la fonction $x \mapsto \left| \frac{2x}{\pi(e^x + e^{-x})} \right|$ nous suffit à dire que $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{2x}{\pi(e^x + e^{-x})} \right| dx$ converge

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{\pi(e^x + e^{-x})} dx$ converge absolument

Donc X admet une espérance

Or, $x \mapsto \frac{2x}{\pi(e^x + e^{-x})}$ est impaire et comme $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{\pi(e^x + e^{-x})} dx$ converge,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{\pi(e^x + e^{-x})} dx = 0$$

Donc $E(X)$ existe et $E(X) = 0$

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 22

Session : 2024

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

b) De la même manière, $x \mapsto \left| \frac{x^4}{\pi(e^x + e^{-x})} \right| \sim_{+\infty} \frac{x^4}{\pi(e^x + e^{-x})}$
 $\xrightarrow{+\infty} 0$ par croissance comparée

On obtient de même la convergence absolue

de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2}{\pi(e^x + e^{-x})} dx = E(X^2)$ d'après le théorème de transfert

Donc $E(X^2)$ existe

6/a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt = \frac{E(T^2)}{n}$ où $T \sim E(n)$

Donc $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt = \frac{1}{n} \cdot \frac{2!}{n^2} = \frac{2}{n^3}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt$ converge et vaut $\frac{2}{n^3}$

$\forall p \in \mathbb{N}$,
 $\sum_{h=0}^p (-1)^h \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2h+1)t} dt = \sum_{h=0}^p (-1)^h \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^{2t}} e^{-t} dt$

$$= \int_0^{+\infty} \sum_{h=0}^p (-e^{-2t})^h t^2 e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1 - (-e^{-2t})^{p+1}}{1 + e^{-2t}} \right) t^2 e^{-t} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t} \sum_{h=0}^p (-1)^h e^{-2ht} (e^{2p+2})^{-t}}{1 + e^{-2t}} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t} e^t}{(1 + e^{-2t}) e^t} dt + (-1)^p \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t} e^{-(2p+2)t}}{1 + e^{-2t}} dt \quad \begin{array}{l} \text{d'après la} \\ \text{relation} \\ \text{de Charles} \end{array}$$

$$= \boxed{I + (-1)^p \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} dt}$$

$$6) d) V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad (\text{d'après la formule de Koenig-Hungere})$$

$$= E(X^2)$$

$$\text{Or, } E(X^2) = \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{2}{\pi} \cdot I$$

$$\text{Or, } \frac{2}{\pi} I = \frac{2}{\pi} \left(\sum_{h=0}^p (-1)^h \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2h+1)t} dt - (-1)^p \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} dt \right) \quad \text{où } p \in \mathbb{N}$$

$$\text{Or, on sait que } \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} dt = 0$$

$$\text{donc } \lim_{p \rightarrow +\infty} (-1)^p \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} dt = 0$$

$$\text{Donc } V(X) = \frac{2}{\pi} \sum_{h=0}^{+\infty} (-1)^h \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2h+1)t} dt$$

$$\text{Or, } \forall h \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2h+1)t} dt = \frac{2}{(2h+1)^3} \text{ (d'après a)}$$

$$\text{Ainsi, } V(X) = \frac{4}{\pi} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{(2h+1)^3} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{32} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\text{Donc } V(X) = \frac{\pi^2}{8}$$

$$7) a) Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$$

$$\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R}_-^*, G(x) = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,$$

$$P(Y \leq x) = P(e^X \leq x) = P(X \leq \ln(x))$$

(par croissance de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

$$= F(\ln(x)) = \frac{2}{\pi} \arctan(x)$$

$$\text{Donc } G(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \arctan(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

* G est C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} G(x)$$

Donc G est continue sur $\mathbb{R}$

Donc Y est une variable aléatoire à densité

$$b) \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+,$$

$$P(M_n \leq x) = P\left(\bigcap_{i=1}^n Y_i \leq x\right) \text{ donc par indépendance} \\ = \prod_{i=1}^n P(Y_i \leq x) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{2}{\pi} \arctan(x)\right) = \left(\frac{2}{\pi} \arctan(x)\right)^n$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, P(M_n \leq x) = 0$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, G_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi} \arctan(x)\right)^n & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 3:

Partie 1:

$$1) \forall (x, y) \in \mathbb{E}^2, \langle f(x), y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle \mu_i, x \rangle \mu_i, y \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle \mu_i, x \rangle \langle \mu_i, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle \mu_i, y \rangle \mu_i, x \right\rangle \\ = \langle f(y), x \rangle$$

Donc f est un endomorphisme symétrique

$$2) \text{ Si } \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \lambda_i = 1, \forall x \in E,$$

$$\underline{f(x)} = \sum_{i=1}^p \langle \mu_i, x \rangle \underline{\mu_i} = x$$

$$3) \text{ Soit } x \in E$$

$$x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle \mu_i, x \rangle \mu_i = 0$$

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 22

Session : 2024

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Comme $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille orthonormale, les vecteurs ne peuvent pas s'annuler entre eux

$$\text{Donc } \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i = 0$$

Comme $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \lambda_i \neq 0$ et $u_i \neq 0$
(car famille orthonormale)

$$\Rightarrow \langle u_i, x \rangle = 0$$

$$\text{Donc } x \in (\text{Vect}(u_1, \dots, u_p))^\perp$$

$$\text{Donc } \text{Ker}(f) = (\text{Vect}(u_1, \dots, u_p))^\perp$$

$$\text{Donc } \dim(\text{Ker}(f)) = \dim E - p$$

b) Ainsi, d'après le théorème du rang,
 $\text{rg}(f) = p$

$$\text{et } \underline{\text{Im}(f) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = U}$$

$$4) \forall h \in \llbracket 1; p \rrbracket, f(u_h) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, u_h \rangle u_i$$

$$= \lambda_h u_h \quad (\text{car } (u_1, \dots, u_p) \text{ est orthonormale})$$

Or, $\forall h \in [1; p], u_h \neq 0$

Donc $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont valeurs propres de f et $\forall h \in [1; p], u_h$ en est un vecteur propre associé

$$5) \lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_n - y\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n - y) = 0 \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$$

Donc par unicité de la limite, le vecteur y est unique

$$6) \forall x \in E, \|f(x)\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i \right\|^2 \\ = \left\langle \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i, \sum_{j=1}^p \lambda_j \langle u_j, x \rangle u_j \right\rangle \\ = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \langle u_i, x \rangle \langle u_i, u_i \rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \langle u_i, x \rangle$$

$$\text{Or, } \forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\left\langle \sum_{i=1}^p \langle u_i, x \rangle u_i, \sum_{j=1}^p \langle u_j, x \rangle u_j \right\rangle} \\ = \sqrt{\sum_{i=1}^p \langle u_i, x \rangle^2}$$

Or, $\forall i \in [1; p], \forall x \in E,$

$$\langle u_i, x \rangle \leq \langle u_i, x \rangle^2$$

Donc $\forall x \in E, \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket,$

$$\lambda_i^2 \langle x_i, u_i \rangle \leq \lambda_i^2 \langle x_i, u_i \rangle^2$$

Ainsi,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \langle x_i, u_i \rangle \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \langle x_i, u_i \rangle^2$$

Donc par décroissance de la fonction $x \mapsto Bx$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$\underline{\|f(x)\| \leq K \|x\|}$$

7) Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}: \|x_n\| \leq K^n \|x_0\|$

On montre, par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},$
 $\|x_n\| \leq K^n \|x_0\|$

Initialisation:

On a : $\|x_0\| \leq \|x_0\|$ donc P_0 est vraie

Hérédité: Supposons P_n vraie (où $n \in \mathbb{N}$)
Montrons que P_{n+1} est vraie

On a, 'd'après la question précédente,

$$\|f(x_n)\| \leq K \|x_n\|$$

donc $\|x_{n+1}\| \leq K \|x_n\|$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} K \|x_n\| &\leq K \cdot K^n \|x_0\| \\ &\leq K^{n+1} \|x_0\| \end{aligned}$$

Donc : $\|x_{n+1}\| \leq K^{n+1} \|x_0\|$

ce qui achève la récurrence

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_n\| \leq K^n \|x_0\|$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \geq 0$ et $\|x_n\| \leq K^n \|x_0\|$

Or, comme $K < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} K^n \|x_0\| = 0$

Donc par encadrement, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0

c) $n^2 K^n \|x_0\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ par croissance comparée

Donc $K^n \|x_0\| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $K^n \|x_0\| \geq 0$ et $\frac{1}{n^2} \geq 0$

Donc $\sum_n K^n \|x_0\|$ converge

Ainsi, par majoration,

$$\sum_n \|x_n\| \text{ converge}$$

Problème:

Partie I

1) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt - \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$
 $= \int_0^1 \left(\frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} - \frac{1}{(1+t^2)^n} \right) dt$ par linéarité de l'intégrale

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 22

Session : 2024

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\text{Or, } \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0; 1], (1+t^2)^{n+1} \geq (1+t^2)^n$$

$$\text{Donc } \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \leq \frac{1}{(1+t^2)^n}$$

$$\text{Donc comme } 1 \geq 0, U_{n+1} - U_n \leq 0$$

Donc $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

$$\text{De plus, } \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0; 1], \frac{1}{(t^2+1)^n} \geq 0$$

$$\text{Donc comme } 0 \leq 1, U_n \geq 0$$

Donc $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive

b) $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0)

Donc $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

$$2) a) \forall x \in [0; 1], \text{ on pose } f: x \mapsto e^{x/2}$$

f est dérivable 2 fois sur $[0; 1]$ et

$$f'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \text{ et } f''(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}}$$

Soit $f \mid [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto e^{\frac{x}{2}} - 1 - x$

f est dérivable sur $[0;1]$ et $\forall x \in [0;1]$,
 $f'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} \geq 2$
 $\Leftrightarrow \ln(2) \leq \frac{x}{2}$ ce qui est faux pour $x \in [0;1]$

Donc f est décroissante sur $[0;1]$
 et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Donc $\forall x \in [0;1], e^{\frac{x}{2}} - 1 - x \leq 0$

$\boxed{\text{Donc } \forall x \in [0;1], e^{\frac{x}{2}} \leq x+1}$

b) On a donc $\forall t \in [0;1]$

$$e^{\frac{t^2}{2}} \leq t^2 + 1$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$e^{\frac{nt^2}{2}} \leq (t^2 + 1)^n$$

Donc par décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{(t^2 + 1)^n} \leq e^{-nt^2/2}$$

Enfin, comme $0 \leq 1$,

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2/2} dt}$

Partie 2:

$$3) \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(1+t^2)^n} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}} \text{ car } \int_1^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^n} dt \text{ converge}$$

$t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ étant continue sur $\mathbb{R}_+$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \text{ converge}$$

$$4) a) \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0; 1], \\ (1+t^2)^n \geq (t^2)^n$$

Donc par décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{t^{2n}}$$

Comme $0 \leq 1$,

$$I_n \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}} dt$$

Or, en posant $y > 1$ et $\int_1^y \frac{1}{t^{2n}} dt$, on a:

$$\int_1^y \frac{1}{t^{2n}} dt = \left[\frac{t^{-2n+1}}{-2n+1} \right]_1^y = \frac{y^{-2n+1}}{-2n+1} + \frac{1}{2n-1} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n-1}$$

$$\text{Finalement, } \forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \leq \frac{1}{2n-1}$$

Et comme pour $t \in [0; 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(1+t^2)^n} \geq 0$,

$$\text{On a bien } \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n-1}$$

b) comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$,

on obtient avec l'encadrement de la question précédente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = I_n + U_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0 + \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n)$$

(qu'il aurait fallut trouver en question 3/d))

5/d)

$$\underline{I_1} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \arctan(y) - \arctan(0) = \underline{\frac{\pi}{2}}$$

c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{I_n}{n} &= \sum_{n=1}^N 2(I_n - I_{n+1}) = 2 \left(\sum_{n=1}^N I_n - \sum_{n=1}^N I_{n+1} \right) \\ &= 2 \left(\sum_{n=1}^N I_n - \sum_{n=2}^{N+1} I_n \right) = 2(I_1 - I_{N+1}) = 2 \left(\frac{\pi}{2} - I_{N+1} \right) \end{aligned}$$

En admettant que $\lim_{N \rightarrow +\infty} I_N = 0$ (car pas trouvée)

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{I_n}{n} = \pi$$

Copie anonyme - n°anonymat : 639515

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 22

Session : 2024

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques approfondies EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{J_n}{n}$ converge et vaut π

d) def suite $J(n)$:

$$J = n \cdot \pi / 2$$

for h in range(2, $n+1$):

$$J = 2 * h * |J| - 2 * (h+1) * J$$

return J

7/a) X_n compte le nombre de piles obtenus lors des $2n$ premiers lancers dont la probabilité est, à chaque fois, pile

$$X_n \sim B(2n, \frac{1}{2})$$

b) Pour que $(X_n = Y_n)$ se réalise, il faut n pile et n face

* On tire n piles : $\binom{2n}{n}$ possibilités

* on tire les n autres : 1 possibilité

$$\text{De plus, } \text{card}(\Omega) = 4^n \text{ donc } P(X_n = Y_n) = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$$

$$\text{Donc d'après 6), } \forall n \in \mathbb{N}, P(X_n = Y_n) = \frac{2}{\pi} J_{n+1}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

a) X_n est une somme de lois de Bernoulli valant 1 si pile est réalisée

