

Copie anonyme - n°anonymat : 405443



W1-00133
405443
Mat Appli

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 75

Session : 2024

Épreuve de : Maths appliquées BTBSC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice n°1.

$$1. a) \forall x \in [0, 1] \quad \frac{1}{4-x^2} = \frac{2a+ax+2b-bx}{4-x^2}$$

$$\frac{1}{4-x^2} = \frac{(a-b)x + 2a+2b}{4-x^2}$$

$$1 = (a-b)x + 2a+2b$$

Par identification polynomiale,
$$\begin{cases} a-b=0 \\ 2a+2b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$b) \mu_0 = \int_0^1 \frac{1}{4-x^2} dx = \int_0^1 \frac{1/4}{2-x} + \frac{1/4}{2+x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{8-4x} + \frac{1}{8+4x} dx$$

$$= -\frac{1}{4} \int_0^1 \frac{-4}{8-4x} dx + \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{4}{8+4x} dx$$

$$= -\frac{1}{4} [\ln|8-4x|]_0^1 + \frac{1}{4} [\ln|8+4x|]_0^1$$

$$= -\frac{1}{4} (\ln(4) - \ln(8)) + \frac{1}{4} (\ln(12) - \ln(8))$$

$$= \frac{1}{4} (-\ln(4) + \ln(12))$$

$$= \frac{1}{4} \ln\left(\frac{12}{4}\right) = \frac{1}{4} \ln(3) = \mu_0$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad u_1 &= \int_0^1 \frac{x}{4-x^2} dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{-2x}{4-x^2} dx \\
 &= -\frac{1}{2} \left[\ln|4-x^2| \right]_0^1 = -\frac{1}{2} (\ln(3) - \ln(4)) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{4}\right) = u_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad a) \quad u_n - u_{n+2} &= 4 \cdot \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx - \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{4-x^2} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{4x^n - x^{n+2}}{4-x^2} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{x^n(4-x^2)}{(4-x^2)} dx = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}
 \end{aligned}$$

$$b) \quad u = 4u - (4u)/(n+1)$$

$$4. \quad a) \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq x^2 \leq 1$$

$$-1 \leq -x^2 \leq 0$$

$$0 \leq 3 \leq 4-x^2 \leq 4$$

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4-x^2} \leq \frac{1}{3}$$

$$\frac{x^n}{4} \leq \frac{x^n}{4-x^2} \leq \frac{x^n}{3}$$

en intégrant de $x=0$ à $x=1$

$$\frac{1}{4} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \leq u_n \leq \frac{1}{3} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{n+1} \right) \leq u_n \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n+1} \right)$$

$$b) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right) = 0, \text{ par encadrement, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

$$c) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j} \quad \text{diverge (Riemann } \alpha=1)$$

Par comparaison
la série de terme

général u_n diverge

5. a) 3. $u_n \sim \frac{1}{3n}$

b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \int_0^1 \overbrace{x^n}^{\uparrow} \cdot \underbrace{\frac{1}{4-x^2}}_{\downarrow} dx$

$x \mapsto x^n$ est C^0 sur $\mathbb{R}$ de primitive $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$
 $x \mapsto \frac{1}{4-x^2}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto \frac{2x}{(4-x^2)^2}$

Par intégration par parties (I.P.P.)

$$u_n = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{1}{4-x^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{2x}{(4-x^2)^2} dx$$

$$= \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$$

c) $0 \leq x \leq 1$

$$3 \leq 4-x^2 \leq 4$$

$$0 < 9 \leq (4-x^2)^2 \leq 16$$

$$\frac{1}{16} \leq \frac{1}{(4-x^2)^2} \leq \frac{1}{9}$$

$$\frac{x^{n+2}}{16} \leq \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} \leq \frac{x^{n+2}}{9}$$

En intégrant de $x=0$ à $x=1$

$$\frac{1}{16} \left[\frac{x^{n+3}}{n+3} \right]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} \leq \frac{1}{9} \left[\frac{x^{n+3}}{n+3} \right]_0^1$$

$$\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(n+3)} \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} \leq \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{(n+3)}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+3} = 0$ par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx = 0$

d) Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n u_n = 1$

Pour n au voisinage de $+\infty$,

$$3n u_n = \frac{3n}{3n+3} - \frac{3n \cdot 2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$$

$$= \frac{3n}{3n(1+\frac{1}{n})} - \frac{n \cdot 6}{n(1+\frac{1}{n})} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \frac{6}{(1+\frac{1}{n})} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n u_n = 1 - 1 \cdot 0 \quad (\text{cf q.c.}) \\ = 1$$

$$\text{D'où } 3n u_n \sim 1 \text{ i.e. } \underline{u_n \sim \frac{1}{3n}}_{n \rightarrow +\infty}$$

exercice 2.

1. a) $x \mapsto 0$ est C^0 et positive sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto -\frac{x^2}{2}$ est C^0 sur $\mathbb{R}$

$\theta \mapsto e^{\theta^2}$ est C^0 sur $\mathbb{R}$

$\rightarrow$ par composé $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ est C^0 sur $\mathbb{R}^+$, positive

D'où par produit $x \mapsto x e^{-\frac{x^2}{2}}$ est C^0 , positive sur $\mathbb{R}^+$

Donc f est C^0 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et positive sur $\mathbb{R}$. (A)

$$\bullet \int_{-\infty}^0 f(x) dx = 0$$

$$\bullet \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\bullet \text{ Posons, } \forall A > 0 \quad \int_0^A x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\left[e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^A = -e^{-\frac{A^2}{2}} + 1$$

$$\text{D'où } \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} (-e^{-\frac{A^2}{2}} + 1) = 0 + 1 \quad \text{car } \lim_{A \rightarrow +\infty} -e^{-\frac{A^2}{2}} = \lim_{\theta \rightarrow +\infty} e^{\theta}$$

$$\text{D'où par Charles, } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0 + 1 \quad (B)$$

$$\theta = -\frac{A^2}{2}$$

D'après (A) et (B) f est une densité

b) Notons $X \in \mathcal{N}(0, 1)$

$$V(X) = 1 = E(X^2) - (E(X))^2 \quad (\text{d'après Koëning-Huygens})$$

$$\text{D'où } \underline{E(X^2) = 1 - 0^2 = 1}$$

c) sous réserve de convergence,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = 0 + \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

$$= \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{2} E(Y^2) \text{ où } Y \in \mathcal{N}(0, 1)$$

$$= \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = E(X)}}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 405443

Emplacement QR Code	Code épreuve : 298	Nombre de pages :	Session : 2024
	Épreuve de : Maths appliquées ED40C		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

2. • $x < 0$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0$$

• $x \geq 0$

$$\begin{aligned}
 P(X \leq x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x f(t) dt \\
 &= \int_0^x t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\left[e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^x = -e^{-\frac{x^2}{2}} + 1
 \end{aligned}$$

D'où $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

$$\begin{aligned}
 x < 0 &\mapsto 0 \\
 x \geq 0 &\mapsto 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}
 \end{aligned}$$

3. a) • $x < 0$: $P(Z \leq x) = P(X^2 \leq x) = 0$

• $x \geq 0$: $P(Z \leq x) = P(X^2 \leq x) = P(X \leq \sqrt{x})$

$$= F_X(\sqrt{x}) = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$$

Donc $F_Z : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

$$\begin{aligned}
 x < 0 &\mapsto 0 \\
 x \geq 0 &\mapsto 1 - e^{-\frac{x}{2}}
 \end{aligned}$$

D'où $Z \sim \tilde{E}\left(\frac{1}{2}\right)$

b)

T.L.P.SVP →

4. $\forall n \geq 0 \quad Y_n = \frac{X}{\sqrt{n}}$

a) • $x < 0$: $P(Y_n \leq x) = P\left(\frac{X}{\sqrt{n}} \leq x\right) = P(X \leq \sqrt{n}x) = 0$

• $x \geq 0$: $P(Y_n \leq x) = P\left(\frac{X}{\sqrt{n}} \leq x\right) = P(X \leq \sqrt{n}x)$
 $= F_X(\sqrt{n}x) = 1 - e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{n}x)^2}$
 $= 1 - e^{-\frac{n}{2}x^2}$

Donc $G_n(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$
 $x < 0 \mapsto 0$
 $x \geq 0 \mapsto 1 - e^{-\frac{n}{2}x^2}$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - e^{-\frac{n}{2}x^2}) = 1 - 0 = 1$

$(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers la loi certaine

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y_n > \varepsilon \cup Y_n < -\varepsilon)$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y_n > \varepsilon)$ car $P(Y_n < -\varepsilon) = 0$ (voir $G_n(x)$)
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - G_n(\varepsilon)) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(\varepsilon) = 1 - 1 = 0$ (cf b))

5. a) $P(M_n > x) = P(\min(X_1, \dots, X_n) > x)$
 $= P((X_1 > x) \cap (X_2 > x) \cap \dots \cap (X_n > x))$
 $= P(X_1 > x) \cdot P(X_2 > x) \cdot \dots \cdot P(X_n > x)$ car les $X_1, \dots, X_n$ sont
 $= (1 - F_X(x))^n$ mutuellement indépendants.

pour $x \geq 0$

D'où $\forall P(M_n > x) = (1 - (1 - e^{-\frac{1}{2}x^2}))^n = e^{-\frac{n}{2}x^2}$

D'où $P(M_n \leq x) = 1 - P(M_n > x) = 1 - e^{-\frac{n}{2}x^2}$

et pour $x < 0$ $P(M_n \leq x) = 0$.

On a bien M_n qui suit la même loi que Y_n

b) def simul M(n):

X = np.array([(-1 + np.exp(-k**2/2)) for k in range(n)])

M = X * (1 / np.sqrt(X))

exercice 3.

1.

$$\int_0^x (x-u) f(u) du$$

Posons le changement de variable intégrale suivant $t = x - u \Leftrightarrow u = x - t$
Le changement est affine donc licite.

Bornes:

$$\int_{u=0}^{u=x} \rightarrow \int_{t=x}^{t=0}$$

Terme différentiel:

$$\frac{du}{dt} = -dt$$

D'où par changement de variable,

$$\int_0^x (x-u) f(u) du = \int_x^0 t f(x-t) (-dt) = \int_0^x t f(x-t) dt$$

On a bien $(*) = (**)$

2. a) ~~$u \mapsto (x-u)$ est C^0 sur $\mathbb{R}$~~

~~$u \mapsto f(u)$ est C^0 sur $\mathbb{R}$ (énoncé)~~

~~Par produit $u \mapsto (x-u) f(u)$ est C^0 sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive notée G , C^1 sur $\mathbb{R}$.~~

~~D'où $f(x) = 1 + G(x) - G(0)$ D'où f est C^1 sur $\mathbb{R}$ (composée) et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = G'(x)$~~

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \int_0^x (x-u) f(u) du \\ = 1 + \int_0^x x f(u) du - \int_0^x u f(u) du$$

$u \mapsto f(u)$ est C^0 sur $\mathbb{R}$ (énoncé) donc admet une primitive F , C^1 sur $\mathbb{R}$
 $u \mapsto u f(u)$ est C^0 sur $\mathbb{R}$ (produit) donc admet une primitive G , C^1 sur $\mathbb{R}$

$$D'où $f(x) = 1 + x(F(x) - F(0)) - (G(x) - G(0))$$$

D'où f est C^1 sur $\mathbb{R}$ par composée, produit, somme.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = F(x) + x f'(x) - F(0) - G'(x)$
 $= \int_0^x f(u) du + x f(x) - 0 - x f(x)$
 $= \int_0^x f(u) du$

b) Comme F est C^1 sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = F(x) - F(0)$ Donc
 f' est C^1 (composée) sur $\mathbb{R}$, Donc f est C^2 sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = F'(x) = f(x)$

c) Notons (EH): $f''(x) - f(x) = 0$

$$r^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow r^2 = 1 \Leftrightarrow r_1 = -1, r_2 = 1$$

D'où $S_{(EH)} = \{ t \mapsto \alpha e^{-t} + \beta e^t \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$

d) $f(0) = 1 + \int_0^0 (0-u) f(u) du = 1 + 0$

$f'(0) = \int_0^0 f(u) du = 0$

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow \alpha e^0 + \beta e^0 = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1$$

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow -\alpha e^0 + \beta e^0 = 0 \Leftrightarrow -\alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

D'où $\alpha = \frac{1}{2} = \beta$

D'où $f(x) = \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{1}{2} e^x$

3. $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 + \int_0^x t f(x-t) dt = 1 + \int_0^x t \frac{e^{(x-t)} + e^{-(x-t)}}{2} dt$
 $= 1 + \frac{1}{2} \left(\int_0^x t e^{(x-t)} + t e^{-(x-t)} dt \right)$
 $= 1 + \frac{1}{2} \left(e^x \int_0^x t e^{-t} dt + e^{-x} \int_0^x t e^t dt \right)$

Calculons $\int_0^x t e^{-t} dt$ par IPP.

$$\int_0^x t e^{-t} dt = [-t e^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t} dt = -x e^{-x} + [-e^{-t}]_0^x$$

$$= -x e^{-x} - e^{-x} + 1$$

De même pour $\int_0^x t e^t dt$ par IPP

$$\int_0^x t e^t dt = [t e^t]_0^x - \int_0^x e^t dt = x e^x - e^x + 1$$

Copie anonyme - n°anonymat : 405443

Emplacement QR Code	Code épreuve : 298	Nombre de pages :	Session : 2024
	Épreuve de : Maths appliquées PDE+EC		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

$$\begin{aligned}
 \text{D'où } & 1 + \frac{1}{2} (e^x(-xe^{-x} - e^{-x} + 1) + e^{-x}(xe^{-x} - e^{-x} + 1)) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} (-2 - 1 + e^x + x - 1 + e^{-x}) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} (-2 + e^x + e^{-x}) \\
 &= 1 - 1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}
 \end{aligned}$$

Donc f est l'unique solution du problème.

4. des résultats restant valables sont :

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \int_0^x f(u) du$ car f est une constante et n'intervient pas dans le calcul de dérivée
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = f(x)$ même raison
- $S_{\text{GCH}} = \{ \alpha x e^{-x} + \beta e^x \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$

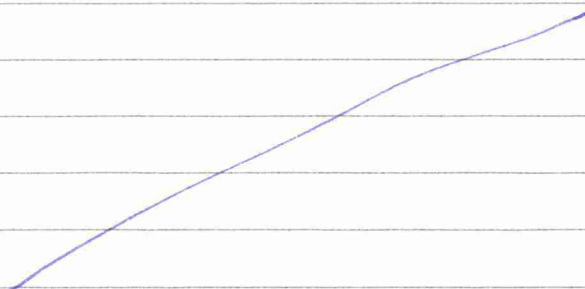
• seul $f(0)$ change, $f(0) = 0$.

$$\text{D'où } f(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 0$$

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow -\alpha + \beta = 0$$

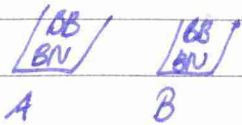
$$\text{D'où } \alpha = 0 = \beta$$

Donc l'unique solution de $f(x) = \int_0^x t f(x-t) dt$ est $f(x) = 0$.



T. L. P. SVP →

Problème:



1. a) $a_0 = P(X_0 = 0) = 0$ (impossible il y a 1 boule blanche dans A au départ)

$b_0 = P(X_0 = 1) = 1$ (énoncé)

$c_0 = P(X_0 = 2) = 0$

b)

$$X_1(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

$P(X_1 = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (il faut tirer la boule blanche dans A et la boule noire dans B)

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \quad (BB \text{ dans A et BB dans B ou BN dans A et BN dans B}) \\ &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_1 = 2) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \quad (BN \text{ dans A et BB dans B}) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

D'où $a_1 = \frac{1}{4}, b_1 = \frac{1}{2}, c_1 = \frac{1}{4}$

d) Comme $(X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2)$ est un système complet d'événements (on admet l'avoir prouvé en c)), la somme des 3 vaut 1 i.e. $a_n + b_n + c_n = 1$.

2. $n \in \mathbb{N}^*$

a) $i = 0, j = 0$

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0) = 0 \text{ impossible}$$

$i = 0, j = 1$

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1) = 1 \cdot 1 \text{ (BB dans B, que des BN dans A)}$$

$$i=0, j=2$$

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=2) = 0 \text{ impossible}$$

$$i=1, j=0$$

$$P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ (BB dans A, BN dans B)}$$

$$i=1, j=1$$

$$P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ (BN dans A, BN dans B ou BB dans A et BB dans B)}$$

$$i=1, j=2$$

$$P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ (BN dans A et BB dans B)}$$

$$i=2, j=0$$

$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0) = 0 \text{ (impossible)}$$

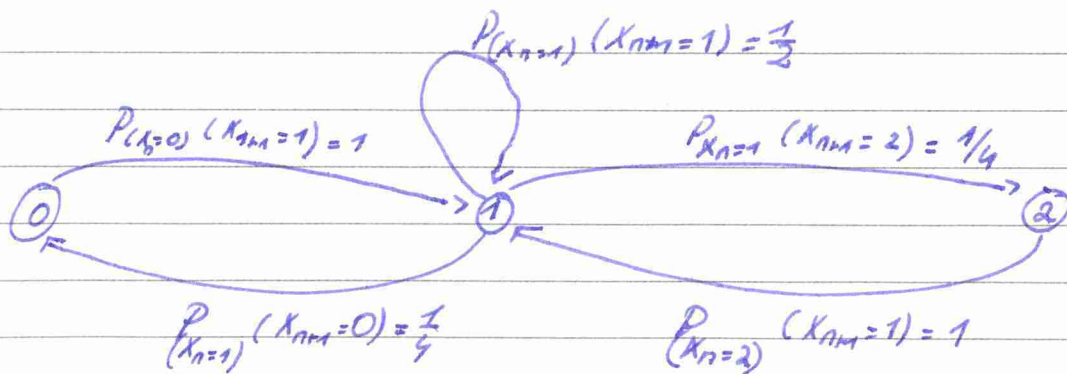
$$i=2, j=1$$

$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1) = 1 \cdot 1 \text{ (que BB dans A, BN dans B)}$$

$$i=2, j=2$$

$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2) = 0 \text{ (impossible)}$$

On a bien



$$b) M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la somme des éléments de chaque ligne fait bien 1.

c) D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(X_{n+1}=0) &= P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0) \cdot P(X_n=0) + P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0) \cdot P(X_n=1) \\ &\quad + P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0) \cdot P(X_n=2). \\ &= 0 \cdot a_n + \frac{1}{4} b_n + 0 \cdot c_n = \frac{1}{4} b_n \end{aligned}$$

De même,

$$b_{n+1} = 1 \cdot a_n + \frac{1}{2} b_n + 1 \cdot c_n$$

$$c_{n+1} = 0 \cdot a_n + \frac{1}{4} b_n + 0 \cdot c_n = \frac{1}{4} b_n$$

Bilan:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{4} b_n \\ b_{n+1} &= a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n \\ c_{n+1} &= \frac{1}{4} b_n \end{aligned}$$

3. $a_1 = \frac{1}{4} b_0 = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$ vrai

$$b_1 = a_0 + \frac{1}{2} b_0 + c_0 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \text{ vrai}$$

$$c_1 = \frac{1}{4} \cdot b_0 = \frac{1}{4} \text{ vrai.}$$

des relations restent vraies pour $n=0$.

4. a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad E(X_{n+1}) = 0 \cdot P(X_{n+1}=0) + 1P(X_{n+1}=1) + 2P(X_{n+1}=2)$
 $= \underline{b_{n+1} + 2c_{n+1}}.$

b) $E(X_{n+1}) = b_{n+1} + 2c_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n + 2(\frac{1}{4} b_n)$
 $= a_n + b_n + c_n = \underline{1} \quad (1. d))$

c) $E(X_{n+1}) = E(X_n) = 1$
 or $E(X_n) = 0a_n + 1b_n + 2c_n$
 Donc $\underline{b_n + 2c_n = 1.}$

5. a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad M_n V = (a_n \ b_n \ c_n) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (2a_n - b_n + 2c_n)$

$$\begin{aligned} (M_{n+1} \cdot V) &= (a_{n+1} \ b_{n+1} \ c_{n+1}) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (2a_{n+1} - b_{n+1} + 2c_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2} b_n - (a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n) + \frac{1}{2} b_n \\ &= -a_n + \frac{1}{2} b_n - c_n = (a_n \ b_n \ c_n) \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 405443

Emplacement QR Code	Code épreuve : 298	Nombre de pages :	Session : 2024
	Épreuve de : Maths appliquées EDCBC		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			
$D' où \text{Pot}(U_n, V) = (a_n, b_n, c_n) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(U_n, V)$ $D' où \text{ (} U_n, V \text{)}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite géométrique de raison } -\frac{1}{2}$ $b) D' où \forall n \in \mathbb{N} \quad (U_n, V) = (U_0, V) \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ $= -1 \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 2a_n - b_n + 2c_n$ 6. T.L.P. S.V.P → 13 / 16			

$$8. a) M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 3/4 & 1/8 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 3/4 & 1/8 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/8 & 3/4 & 1/8 \\ 3/16 & 5/8 & 3/16 \\ 1/8 & 3/4 & 1/8 \end{pmatrix}$$

$$M^2 + M = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 3/4 & 1/8 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/2 & 1/4 \\ 3/8 & 5/4 & 3/8 \\ 1/4 & 3/2 & 1/4 \end{pmatrix} = 2M^3$$

b) $\lambda \mapsto 2\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda$ est un polynôme annulateur de M
 $2\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda = \lambda(2\lambda^2 - \lambda - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = 0 \text{ ou } (\lambda - 1)(2\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } Sp(M) \subset \left\{ -\frac{1}{2}, 0, 1 \right\}$$

On remarque que $M \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $-\frac{1}{2} \in Sp(M)$

De même $M \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $0 \in Sp(M)$

et $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $1 \in Sp(M)$

$$\text{Donc } Sp(M) = \left\{ -\frac{1}{2}, 0, 1 \right\}.$$

Donc $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0$ est une base de $\text{Ker}(M + \frac{1}{2}I)$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$ une base de $\text{Ker}(M)$
 et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$ une base de $\text{Ker}(M - I)$

c) Comme P est la concaténation des bases des sous-espaces propres de M , par théorème de liberté P est inversible.

$$d) MP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où $MP = PD$ d'où comme P est inversible $M = PDP^{-1}$
Donc M est diagonalisable.

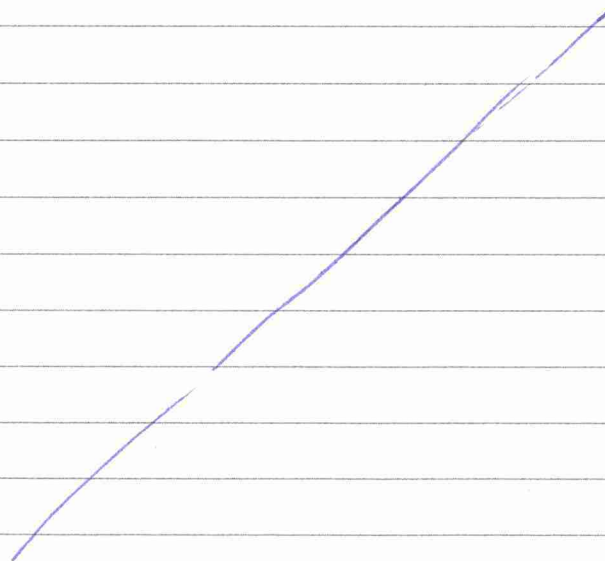
$$e) M_{n+1} = (a_{n+1} \ b_{n+1} \ c_{n+1}) = \left(\frac{1}{4} b_n \quad a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n \quad \frac{1}{4} b_n \right) \text{ (3.2.c)}$$

$$M_n \cdot M = (a_n \ b_n \ c_n) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4} b_n \quad a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n \quad \frac{1}{4} b_n \right)$$

On a bien $\forall n \in \mathbb{N} \quad M_{n+1} = M_n M$.

f) $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison M ,

D'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad M_n = M_0 \cdot M^n$



1

2

3