

# Copie anonyme - n°anonymat : 405443



W1-00133  
405443  
Mat2 Appli

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 11

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques 2 appliquées ESSEC

## Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

## Partie I:

1.  $A$  est symétrique réelle ( $\in M_n(\mathbb{R})$ ) donc  $A$  est diagonalisable  
i.e il existe une matrice  $P$  inversible tel que  $P^{-1}AP = D$ ,  
une matrice diagonale, ses pivots étant les valeurs propres de  $A$ .

2. Pivot rapide sur  $A - \lambda I$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\lambda \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 1-\lambda & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & -1 & \lambda^2 - \lambda - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & -1 & \lambda^2 - \lambda - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + (1-\lambda)L_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & -1 & \lambda^2 - \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

• 1<sup>er</sup> cas:  $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

triangulaire avec un 0 sur la diagonale, donc non inversible,  $0 \in \text{Sp}(A)$ .

• 2<sup>e</sup> cas  $\lambda \neq 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & -1 & \lambda^2 - \lambda - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow \lambda L_3 - L_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & Q(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= \lambda(\lambda^2 - \lambda - 1) - \lambda \\ &= \lambda(\lambda^2 - \lambda - 1 - 1) \\ &= \lambda(\lambda^2 - \lambda - 2) \end{aligned}$$

D'où pour que  $A - \lambda I$  soit inversible,  $\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$   
 $\lambda = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$

$$\text{Donc } \text{Sp}(A) = \{-1, 0, 2\}$$

$$\text{D'où } \underline{C(A) = |-1| + |0| + |2| = 1 + 2 = 3.}$$

4.

a) la diagonale du produit  $AB$  est la somme telle que  $\sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,i}$ .

$$\text{D'où } \underline{\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,i} \right)}$$

b) la diagonale du produit  $BA = \sum_{j=1}^n b_{i,j} a_{j,i}$

$$\text{Donc } \underline{\text{tr}(BA) = \text{tr}(AB)}$$

la transposée de  $A$  transforme chaque colonne en ligne  
donc  ${}^tAA = \sum_{j=1}^n (a_{j,i})^2$   
sur la diagonale de

$$\text{D'où } \underline{\text{tr}({}^tAA) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{j,i})^2}$$

la somme de coefficient au carré ne peut faire 0 que s'il s'agit de 0 donc  $\underline{A = O_n}$

5. a) On admet avoir montré 4. c).

$A$  est symétrique réelle donc diagonalisable, de plus elle est semblable à  $D = P^{-1}AP$ , matrice diagonale représentant les valeurs propres de  $A$  sur les coefficients de sa diagonale.

$$\text{D'après 4. c) } \text{tr}(A) = \text{tr}(D)$$

or les coefficients  $d_{i,j}$  de  $D$  sont soit des 0 soit les valeurs propres de  $A$ . En passant à la valeur absolue, on obtient l'inégalité triangulaire suivante:

$$\left| \sum_{i=1}^n d_{i,i} \right| \leq \sum_{i=1}^n |d_{i,i}|$$

$$\text{D'où } \underline{|\text{tr}(A)| \leq E(A)}$$

b) Comme  $A$  est symétrique,  $A^2 = {}^t A A$  car  ${}^t A = A$ .

$$\text{Donc d'après 4. b) } \text{tr}(A^2) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ji}^2$$

Or  $A^2$  est semblable à  $D^2$   $D^2 = P^{-1} A P P^{-1} A P = P^{-1} A^2 P$

$$\text{Donc } \text{tr}(A^2) = \text{tr}(D^2) \quad (4. c))$$

Comme  $D$  est diagonale  $D^2$  est la matrice avec les valeurs absolues de  $A$  au carré

$$\text{Donc } \text{tr}(D^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$$

$$\text{D'où } \text{tr}(A^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2.$$

6. a)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$   $A$  est donc symétrique.

b)  $\text{tr}(A) = 6$   
 $\text{tr}(A^2) = 18$

Pivot rapide sur  $A - I$ :

donc  $1 \in \text{Sp}(A)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} l_2 \leftarrow l_2 - l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 - l_1 \end{array}$$

D'après 5. b)  $18 = 1 + x^2 + y^2$  car  $A$  a au plus 3 valeurs propres

$$\text{Donc } 18 = 1 + 1 + 4^2$$

car  $E \in M_3(\mathbb{R})$

$$\text{Donc } \text{Sp}(A) = \{1, 4\}$$

$$\underline{E(A) = 1 + 4 = 5.}$$

Partie 2:

7. b) `prod 2K(1, -1, 2, np.array([-2, 1], [1, -2]))`

$$\begin{aligned} 8. a) (u * A)y &= \begin{pmatrix} u A a x + v A b x \\ v A a x + w A b x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u a p x + v b p x \\ v a p x + w b p x \end{pmatrix} \\ &= \underline{\underline{\begin{pmatrix} (u a + v b) x \\ (v a + w b) x \end{pmatrix}}} \end{aligned}$$

$$b) \mu \begin{pmatrix} (ua+vb)x \\ (va+wb)x \end{pmatrix} = \mu \cdot M \cdot y$$

$$D'où (M \star A)y = \mu \cdot M \cdot y$$

Donc  $y$  est un vecteur propre de  $(M \star A)$  pour  $\mu M$

9. a)  $M \in M_2(\mathbb{R})$  donc elle admet au plus 2 valeurs propres. Plus  $M$  est symétrique réelle donc inversible donc il existe  $P$ , concaténation des sous espaces propres, inversible. On voit que  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  est le sous espace propre associé à  $\lambda_1$  donc pour que  $P$  soit carrée donc inversible il faut  $\lambda_2$  avec comme sous espace propre associé  $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$  comme  $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  est inversible,  $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)$  est libre (A),  $\in M_{2,1}(\mathbb{R})$  et

Car  $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = 2 = \dim(M_{2,1}(\mathbb{R}))$  donc avec (A), (B), (C)

$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)$  est une base de  $M_{2,1}(\mathbb{R})$

De la même façon, comme  $A$  est symétrique réelle et  $\in M_n(\mathbb{R})$  elle a au plus  $n$  valeurs propres.

$(x_1, \dots, x_n)$  est donc une base de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$

b) Comme  $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)$  et  $(x_1, \dots, x_n)$  sont libres (car bases voir a))  $(y_1, z_1, \dots, y_n, z_n)$  étant la concaténation de deux familles libres, elle est elle même libre.

c) On admet

d) car  $(M \star A)$  est semblable à la matrice

$$E(M \star A) = |x_1 p_1| + |x_2 p_1| + \dots + |x_1 p_n| + |x_2 p_n| \text{ diagonale dont les coefficients sont } \lambda_i \mu_i \text{ } \lambda_i \in \mathbb{R}, \mu_i \in \mathbb{C} \text{ (cf c))}$$

$$E(M) = |x_1| + |x_2|$$

$$E(A) = \sum_{k=1}^n |\mu_k|$$

$$\text{On a bien } \underline{E(M \star A) = E(M) \times E(A)}$$

# Copie anonyme - n°anonymat : 405443

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2024

Emplacement  
QR Code

Épreuve de : Mathématiques 2 appliquées ESSEC

## Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 3:

11. a) la matrice d'adjacence d'un graph non orienté est une matrice de 1 et de 0, 1 quand les sommets sont reliés par une arête et 0 sinon.

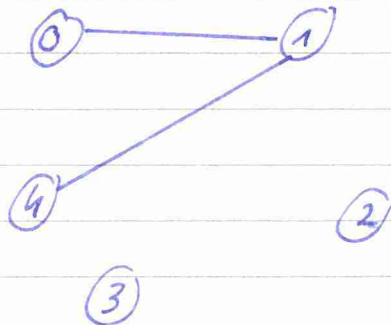
$$\text{D'où } \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} = \sum_{(i,j) \in I^2} a_{ij} = 0.$$

Il y a  $m$  arêtes or comme dans la matrice les arêtes sont comprises 2 fois,  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} = \sum_{(i,j) \in I^2} a_{ij} = 2m.$

b)  ~~$n \geq 2$ ,  $m \geq 1$  et  $n \geq p \geq 2$~~   
On admet l'inégalité.

12. a) On cherche à montrer que  $A$  est diagonalisable.

Examinons  $G_5(A)$  à 5 sommets, ainsi que sa matrice d'adjacence:



$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc  $A_5$  est symétrique réelle.

D'où pour  $G(A)$  de l'énoncé,  $A$  est symétrique réelle, sa diagonale n'est composée que de 0 (il n'y a pas de boucle).  
 D'où comme  $A$  est symétrique, elle est diagonalisable i.e. il existe  $P$  inversible  $\in M_n(\mathbb{R})$  tq  $P^{-1}AP = D \neq 0_n$ .

b) Comme  $A$  et  $D$  sont semblables et que  $\text{tr}(A) = 0$  (pas de boucle dans le graph, diagonale nulle) d'après 4.c)  
 $\text{tr}(A) = \text{tr}(D) = 0$ .

$A^2$  et  $D^2$  sont semblables (voir 5.b)) et comme  $A$  est symétrique  
 $A^2 = {}^tAA$  d'après 4.b)  $\text{tr}({}^tAA) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2$

$$\text{Donc } \text{tr}(A^2) = \text{tr}({}^tAA) = \text{tr}(D^2) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2$$

Comme il ne s'agit que de 1,  $1^2 = 1$  donc  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} = 2m$  (11.a))

$$\text{Donc } \text{tr}(D^2) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 = 2m.$$

13. a) Si  $k$  est isolé,  $e_k$  sera tel qu'à l'emplacement du 1, il n'y aura pas de 1 dans  $A$  mais un 0 donc.

$$e_k \cdot A = 0 \text{ donc } \underline{e_k \in \text{Ker}(A)}.$$

Soit  $k \in \llbracket 1, n-p \rrbracket$ , représentant les  $n-p$  sommets isolés.

Soit  $\tilde{F}$  la famille composée des  $(e_1, e_2, \dots, e_{n-p})$ , des  $e_k$

D'après la preuve précédente,  $\tilde{F} \subset \text{Ker}(A)$

d'où  $\text{card}(\tilde{F}) \leq \dim(\text{Ker}(A))$

$$\text{Donc } \underline{n-p \leq \dim(\text{Ker}(A))}.$$

Now admettons la dernière égalité.

b) D'après 12. b)  $\text{tr}(A^2) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2$

or d'après 5. b) comme  $A$  vérifie les hypothèses,  
 $\text{tr}(A^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$

D'où  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$

Donc  $\sum_{k=1}^p \lambda_k^2 = 2m$  (12. b)) or comme d'après a) pour  $n > p$   $\lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n = 0$

$\sum_{k=1}^p \lambda_k^2 + 0 = 2m.$

$\theta > 0$  est évident, les  $\lambda_k$  ne sont pas tous nuls.

$\sum_{k=1}^p \lambda_k^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \theta^2 + \dots + \lambda_p^2 = 2m$

Donc  $\theta^2 \leq 2m - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_p^2)$

Donc  $\theta^2 \leq 2m$

Donc  $\theta \leq \sqrt{2m}$

D'où  $0 < \theta \leq \sqrt{2m}$

d) On admet des résultats question c) ] ne pas considérer s.v.p

D'après c)

$\left( \sum_{i=1}^p \lambda_i \right)^2 \leq p \sum_{i=1}^p \lambda_i^2$

$\left( \sum_{i=1}^p \lambda_i \right)^2 \leq p \cdot 2m$  (voir b))

$\left| \sum_{i=1}^p \lambda_i \right| \leq \sqrt{p \cdot 2m}$

$$14. a) Q^{-1} = {}^t Q \Leftrightarrow Q \cdot {}^t Q = I$$

$$\text{or } Q = P \text{ donc } {}^t Q = {}^t ({}^t P) = P$$

$$\text{Donc } Q \cdot {}^t Q = {}^t P \cdot P = P^{-1} \cdot P = I$$

$$\text{Donc on a bien } \underline{Q^{-1} = {}^t Q.}$$

$$\underline{A = P D P^{-1} = {}^t Q D Q}$$

$$\underline{{}^t Y Y = {}^t (Q X) (Q X) = {}^t X {}^t Q Q X = {}^t X X \text{ car } {}^t Q Q = I}$$

$$b) {}^t X A X = {}^t X {}^t Q D Q X = {}^t (Q X) D (Q X) = {}^t Y D Y$$

$${}^t Y = (y_1 \dots y_n)$$

$${}^t Y \cdot D = (y_1 \dots y_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = (y_1 \lambda_1 \ y_2 \lambda_2 \ \dots \ y_n \lambda_n)$$

$${}^t Y \cdot D \cdot Y = (y_1 \lambda_1 \ y_2 \lambda_2 \ \dots \ y_n \lambda_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y_1^2 \lambda_1 + y_2^2 \lambda_2 + \dots + y_n^2 \lambda_n$$

$$\text{On a bien } \underline{{}^t X A X = {}^t Y D Y = \sum_{k=1}^n y_k^2 \lambda_k.}$$

$$c) {}^t Y \cdot Y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n y_k^2.$$

$$\text{On veut montrer que } \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2 \leq \theta \sum_{k=1}^n y_k^2$$

pour  $\lambda \in ]1, n]$

$$\text{Donc } \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \theta y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \leq \theta (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)$$

$$\text{comme } \forall k \in \{1, n\} \ \lambda_k y_k^2 \leq \theta y_k^2$$

Par passage des inégalités à la somme

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2 \leq \sum_{k=1}^n \theta y_k^2$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2 \leq \theta \sum_{k=1}^n y_k^2$$

$$\text{Donc } \underline{{}^t X A X \leq \theta {}^t X X.}$$

# Copie anonyme - n°anonymat : 405443

Emplacement  
QR Code

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques 2 appliquées ESSEC

## Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

15. a) Comme les 1 dans la matrice  $U$  sont aussi présents au même endroit dans la matrice  $A$ ,  ${}^tU A U$  donne la somme des  $a_{i,j}$  de  $A$ . Donc  ${}^tU A U = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in I^2} a_{i,j} = 2m$  (cf 11.a))

D'après 14. c) avec  $X=U$   ${}^tU A U \leq \theta {}^tU U$

Donc  $2m \leq \theta {}^tU U$

D'après 14. c)  ${}^tU U = \sum_{k=1}^n u_k^2$  avec  $u_k = 0$  ou  $1$

Comme  $n-p$  sommets sont isolés, de  $p+1$  à  $n$   $u_k$  vaut 0.

Donc  ${}^tU U = \sum_{k=1}^p u_k^2 = \sum_{k=1}^p 1 = p$

Reprenons  $2m \leq \theta {}^tU U$

Donc  $2m \leq \theta p$

Donc  $\frac{2m}{p} \leq \theta$

b) D'après 13. b)  $0 < \theta \leq \sqrt{2m}$

Donc  $\frac{2m}{p} \leq \theta \leq \sqrt{2m}$

$\frac{\sqrt{2m}}{p} \leq \frac{\theta}{\sqrt{2m}} \leq 1$  car  $\sqrt{2m} > 0$  (il y a des sommets non isolés)

D'après 11. b)  $1 \leq \frac{2m}{p}$

D'où  $1 \leq \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{p}}$

D'où  $\frac{1}{\sqrt{p}} \leq \frac{\sqrt{2m}}{p}$

On a bien  $\frac{1}{\sqrt{p}} \leq \frac{\sqrt{am}}{p} \leq \frac{\theta}{\sqrt{am}} \leq 1$

16. a)

Par produit, composée et comme  $F$  est  $C^2$  sur  $[0, 1]$ .

$$\forall x \in [0, 1] \quad F'(x) = 1 + \sqrt{p-1} \cdot (-x(1-x^2)^{1/2}) \\ = 1 - x \sqrt{p-1} \sqrt{1-x^2}$$

ne pas  
considérer  
s.v.p

17. a)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Pivot rapide sur  $A+I$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \vdots \end{matrix}$$

triangulaire, pivot de la diagonale comporte des 0 donc  $A+I$  non inversible.

$-1 \in Sp(A)$ .

Réolvons  $K_{-1}$ :  $(A-I)X=0$  d'inconnue  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ .

$$K_{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 - \dots - x_n \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ \vdots \\ x_n \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (\text{identification matricielle})$$

Donc  $\text{Ker}(A-I) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \end{pmatrix} \right)$

$$= \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$n-1$  vecteurs

et  $\dim(\text{Ker}(A-I)) = n-1$

c)

On admet que  $n-1$  est valeur propre de  $A$ .

Comme  $\dim(\text{Ker}(A+I)) = n-1$ ,  $\dim(\text{Ker}(A-(n-1)I)) = 1$

Donc

$$E(A) = (n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} 1 = (n-1) + (n-1) = \underline{2(n-1)}$$

