



E6-00243
816649
Mat Appli

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 32

Session : 2024

Épreuve de : Maths Appliquées - EM LYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1:

Partie A:

$$1) a) : x'(t) = -x(t) \Leftrightarrow x'(t) + x(t) = 0$$

Alors, nous avons une équation différentielle homogène.

et l'ensemble des solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions x définies par:

$$x(t) = ke^{-t} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

$$b) \text{ Soit } x_0(t) = (at+b)e^{-t} \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

x_0 est clairement dérivable et

$$\begin{aligned} x_0'(t) &= ae^{-t} - (at+b)e^{-t} \\ &= e^{-t}(-at + a - b) \end{aligned}$$

Alors, (E) se réécrit comme:

$$e^{-t}(-at + a - b) = e^{-t}(-at - b + 1)$$

$$\Leftrightarrow -at + a - b = -at + 1 - b$$

$$\Leftrightarrow a = +1$$

Alors, une solution particulière x_0 de (E) est de forme : $x_0(t) = (t + b)e^{-t}$ avec $b \in \mathbb{R}$.

On peut donc dire, qu'avec $b = 0$, qu'une solution particulière x_0 de (E) est définie par $x_0(t) = te^{-t}$

c) ~~L'équation homogène de E~~

Alors, l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions se définies par :

$$x(t) = te^{-t} + ke^{-t} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

2/a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Cherchons les valeurs propres de A.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

λ est valeur propre de A $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

$$\Leftrightarrow (-1-\lambda)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -1-\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -1$$

$$\text{Alors, } \text{Sp}(A) = \{-1\}.$$

$$(A+I)U = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ 0v = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow v = 0$$

Alors, le sous-espace propre de A associé à la valeur propre -1 est : $E_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}, u \in \mathbb{R} \right\}.$
 $= \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$

A est une matrice carrée d'ordre 2 et elle ne peut pas avoir une base constituée de plusieurs vecteurs donc

A n'est pas diagonalisable.

b) Soient $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$

on a alors : $X'(0) = AX(0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'(0) = -1 + 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Ce problème est un problème de Cauchy donc il existe une unique solution (x, y) de (S) qui vérifie $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$.

c) D'après la question 1,

$$x(t) = 0 + k e^{-t} = k$$

Alors, $x(0) = 1 \Leftrightarrow k = 1$

donc l'unique solution x est la fonction x telle que $x(t) = t e^{-t} + e^{-t}$.

Et d'après la solution de la question 1) a),

$$y'(t) = -y(t) \Leftrightarrow y(t) = k e^{-t} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

~~Donc~~ Donc $y(t) = k e^{-t}$

Or: si $y(0) = 1$, alors $k = 1$.

Donc l'unique solution y est la fonction y définie par $y(t) = e^{-t}$.

Copie anonyme - n°anonymat : 816649

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths Appliquées - EM LYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$d) te^{-t} = \frac{t}{e^t}$$

Donc, par croissances comparées, $\lim_{t \rightarrow +\infty} te^{-t} = 0$

Donc, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$

et $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$

Donc la solution (x, y) de (S) telle que $x(0) = 1$ et $y(0) = -1$ converge vers l'état d'équilibre $(0, 0)$, quand t tend vers $+\infty$.

```
3) import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
T = np.linspace(-2, 10, 100)
x = [t * np.exp(-t) + np.exp(-t) for t in T]
y = [np.exp(-t) for t in T]
plt.title("Trajectoire de la solution")
plt.plot(x, y)
plt.show
```

Partie B:4) a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = +\infty.$$

$$f_k(x) = x e^{kx} + e^{kx}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{kx} = 0 \quad (\text{car } k > 0).$$

$$\text{et } x e^{kx} = \frac{x}{e^{-kx}}$$

Alors, par croissances comparées, je ne suis pas sûr, mais je suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = +\infty$.

b) Comme produit de fonctions dérivables, f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$.

et par tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'_k(x) = 1 e^{kx} + k(x+1)e^{kx} = e^{kx}(1 + k(x+1)).$$

$$\text{Alors, } f'_k(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + k(x+1) \geq 0$$

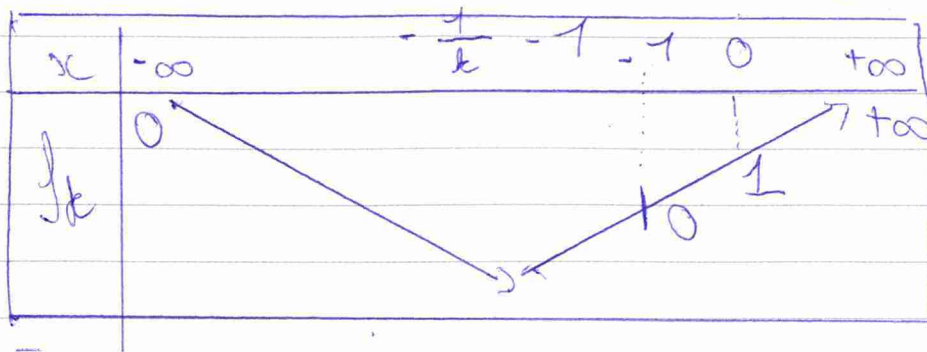
$$\Leftrightarrow k(x+1) \geq -1$$

et en multipliant par $\frac{1}{k}$ avec $k \neq 0$ et $k > 0$,

$$\text{on a : } f'_k(x) \geq 0 \Leftrightarrow x+1 \geq \frac{-1}{k}$$

$$(\Leftrightarrow) x \geq \frac{-1}{k} - 1.$$

On obtient alors le tableau de variations suivant :



De plus, $f_k(-1) = 0$
 et $f_k(0) = 1$

Partie C:

6)a) Je dois ici utiliser le théorème de la bijection.

Or puisque f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue

et sur $]-\frac{1}{k} - 1; +\infty[$, f est strictement croissante donc d'après le théorème de la bijection,

~~$f_k(x) = k$ admet une unique solution~~

f_k réalise une bijection de $]-\frac{1}{k} - 1; +\infty[$ sur $]0; +\infty[$. Et $k \in]0; +\infty[$

donc k admet un unique antécédent par f_k , que l'on note v_k .

Donc l'équation $f_k(u) = k$ admet une unique solution dans A , v_k .

$$b) f_1(x) = (x+1)e^x$$

$$\text{donc } f_1(x) = 1 \Leftrightarrow (x+1)e^x = 1$$

$$\text{Or: si } x = 0, (x+1)e^x = 1$$

Donc v_1 peut valoir 0 : et comme v_k est

$$\text{unique, on a : } \boxed{v_1 = 0}$$

7) pour tout $k \geq 1$:

$$f_k(0) = 1 \leq k$$

$$\Rightarrow f_k(0) \leq f_k(v_k)$$

et comme f_k est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ (car elle l'est à partir de $\frac{1}{k} - 1 < 0$), alors

$$\text{on a } \boxed{0 \leq v_k}$$

$$\begin{aligned} \text{De plus, } f_k\left(\frac{\ln(k)}{k}\right) &= (x+1) \left(\frac{\ln(k)}{k} + 1\right) e^{k \cdot \frac{\ln(k)}{k}} \\ &= \left(\frac{\ln(k)}{k} + 1\right) k \\ &= \ln(k) + k. \end{aligned}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 816649

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths Appliquées - EM LYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\text{Or : } k \geq 1, \text{ donc } \ln(k) \geq 0$$

$$\text{donc } \ln(k) + k \geq k$$

$$\text{donc } f_k\left(\frac{\ln(k)}{k}\right) \geq f_k\left(\frac{1}{k}\right)$$

Et encore une fois, par stricte croissance de f_k ,

$$\text{on a : } \boxed{v_k \leq \frac{\ln(k)}{k}}$$

Alors, comme $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(k)}{k} = 0$ par croissances comparées,

par théorème d'encadrement, on a :

$$\boxed{\lim_{k \rightarrow +\infty} v_k = 0}$$

8) a) Soit $k \geq 1$. J'adm. le résultat

b) Il faut montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{v_k}{\frac{\ln(k)}{k}} = 1$

On: pour $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{v_k}{\frac{\ln(k)}{k}} &= \frac{k \cdot v_k}{\ln(k)} = \frac{k \cdot \frac{\ln(k) - \ln(v_k + 1)}{k}}{\ln(k)} \\ &= \frac{\ln(k) - \ln(v_k + 1)}{\ln(k)} \\ &= 1 - \frac{\ln(v_k + 1)}{\ln(k)} \end{aligned}$$

On, pour k voisin de $+\infty$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} v_k = 0$

et d'après le cours, pour t voisin de 0, $\ln(1+t) \sim t$

Donc pour k voisin de $+\infty$, $\ln(1+v_k) \sim v_k$

donc pour k voisin de $+\infty$, $\frac{\ln(v_k + 1)}{\ln(k)} \sim \frac{v_k}{\ln(k)}$

On: $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(k)} = 0$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} v_k = 0$ donc par

produit, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{v_k}{\frac{\ln(k)}{k}} = 1$

Donc, pour k voisin de $+\infty$, $v_k \sim \frac{\ln(k)}{k}$

g) pour k voisin de $+\infty$, $u_k \sim \frac{\ln(k)}{k} \geq 0$.

Alors, d'après la règle des équivalences pour les séries à termes positifs, $\sum u_k$ sera de même nature que $\sum \frac{\ln(k)}{k}$.

Exercice 2: Partie A:

$$\begin{aligned} 1) \quad A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } A \cdot (-A) = I$$

$$\text{donc } \boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = -A.}$$

$$2) \quad A^2 = -I \quad (\Leftrightarrow) \quad A^2 + I = 0$$

Donc d'après un polynôme annulateur de A est $Q(x) = x^2 + 1$.

Or: $Q(x) \neq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ donc il n'est pas possible que A ait des valeurs propres.

$$\text{Donc } \boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

3). $\mathcal{U} \subset M_2(\mathbb{R})$

• Testons le vecteur nul :

$$A \cdot 0 = 0 \text{ et } 0 \cdot A = 0$$

donc $A \cdot 0 = 0 \cdot A : 0 \in \mathcal{U}$ et $\mathcal{U}$ est non-vide

• $M_2(\mathbb{R})$ est-il stable par combinaison linéaire ?

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(M, N) \in \mathcal{U}^2$: a-t-on :

$$A(\alpha M + \beta N) = (\alpha M + \beta N)A ?$$

$$A(\alpha M + \beta N) = \alpha AM + \beta AN$$

Or, $M \in \mathcal{U}$ donc $AM = MA$ et $N \in \mathcal{U}$ donc $AN = NA$

$$\text{donc } A(\alpha M + \beta N) = \alpha MA + \beta NA$$

$$\Leftrightarrow A(\alpha M + \beta N) = (\alpha M + \beta N)A$$

donc $\mathcal{U}$ est stable par combinaison linéaire.

Donc $\mathcal{U}$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

4) a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

$$AM = MA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 816649

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths Appliquées - EM LYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -c = b \\ -d = -a \\ a = d \\ b = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases}$$

Alors l'équation $MA = AM$ a pour solution l'ensemble des matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ telles que l'on est $M = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$, avec $(a, c) \in \mathbb{R}$.

b) (I_2, A) est une famille constituée de 2 vecteurs ~~donc c'est une famille~~ qui ne sont pas proportionnels donc c'est une famille libre.
et $\mathcal{L}$ est l'ensemble des matrices M qui vérifient :

$$M = aI + cA \text{ d'après la question précédente.}$$

avec $(a, c) \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{Donc } \mathcal{L} = \text{vect}(I_2, A)$$

Donc (I_2, A) est une famille génératrice de $\mathcal{L}$

donc (I, A) est une base de $\mathcal{U}$

5) a) Soient $M \in \mathcal{U}$ et $N \in \mathcal{U}$

$$\text{Alors, } AMN = MAN \quad (\text{car } M \in \mathcal{U})$$

$$\Leftrightarrow AMN = MNA \quad (\text{car } N \in \mathcal{U})$$

donc $MN \in \mathcal{U}$

b) Soient $M \in \mathcal{U}$ et $N \in \mathcal{U}$:

$$\cancel{MN} = AM = MA$$

et comme A est inversible, on a : $M = A^{-1}MA$

$$\Leftrightarrow M = -AMA$$

$$\text{Donc } MN = -AMAN$$

x

6) ~~Soit~~ Si M est une matrice non nulle de $\mathcal{U}$,

alors $M = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$ avec a et c des réels

différents de 0.

$$M = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} -c & a \\ c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -c & a \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On a alors obtenu une matrice triangulaire, qui n'a pas de 0 sur sa diagonale, car $c \neq 0$ et $a \neq 0$ donc

M est inversible

$$\begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2} L_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow -\frac{1}{c} \cdot L_1$$

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{2a} L_2$$

(bien sûr, $a \neq 0$ et $c \neq 0$)

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = M^{-1} \text{ avec } a \in \mathbb{R}.}$$

Partie D:

$$7)a) \quad M^2 = (aI_2 + bA)^2$$

A et I commutent.

$$\text{et on a: } M^2 = (aI_2)^2 + (bA)^2 + 2abI_2 A$$

$$= a^2 I_2 + b^2 A^2 + 2ab A$$

$$= a^2 I_2 - b^2 I_2 + 2ab A$$

(d'après 1)

$$\Rightarrow \boxed{M^2 = (a^2 - b^2) I_2 + 2ab A}$$

b)

$$\text{donc } P(M) = 0 \Leftrightarrow M^2 + uM + v = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)I_2 + 2abA + uM + v = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)I_2 + 2abA + u(aI_2 + bA) + v = 0$$

x

8) a) x

b) x

$$9) P(M) = 0_2 \Leftrightarrow M^2 + uM + v = 0$$

x

Partie C):

10) Montrons que γ est une application linéaire:

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(M, N) \in M_2(\mathbb{R})$,

$$\gamma(\alpha M + \beta N) = A \cdot (\alpha M + \beta N) \cdot A$$

$$= \alpha AMA + \beta ANA$$

$$= \alpha \gamma(M) + \beta \gamma(N) : \underline{\gamma \text{ est linéaire}}$$

et d'après l'énoncé, $\gamma: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$, donc

γ est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$

Copie anonyme - n°anonymat : 816649

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths Appliquées - EM Lyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

11) Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$,

$$\varphi \circ \varphi(M) = \varphi(\varphi(M))$$

$$= \varphi(A \cdot \varphi(M))$$

$$= \varphi(A \cdot M \cdot A)$$

$$= A \cdot A \cdot M \cdot A \cdot A$$

$$= A^2 \cdot M \cdot A^2$$

$$= -I \cdot M \cdot -I \quad (\text{d'après 1})$$

$$= M$$

Donc $\varphi \circ \varphi = \text{Id}$, l'endomorphisme identité.

Alors, il semble que φ est bijectif et que $\varphi = \varphi^{-1}$

12) a) $\varphi(E_1) = A \cdot E_1 \cdot A$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\psi(E_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} = -E_4$$

$$\psi(E_2) = A \cdot E_2 \cdot A$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = E_3$$

$$\psi(E_3) = A \cdot E_3 \cdot A$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \psi(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_2$$

$$\text{et } \psi(E_4) = A \cdot E_4 \cdot A$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(E_4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = -E_1$$

Alors, $B = \begin{pmatrix} \psi(E_1) & \psi(E_2) & \psi(E_3) & \psi(E_4) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} /E_1 \\ /E_2 \\ /E_3 \\ /E_4 \end{matrix}$

b) B est symétrique donc diagonalisable

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4.$$

donc $B^2 - I_4 = 0$

donc $Q(x) = x^2 - 1$ est un polynôme annulateur de B .

et les racines de Q sont -1 et 1 donc les valeurs propres possibles de B sont -1 et 1 .
Vérifions cela: pour $\lambda = 1$

$$B - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} : C_n : L_1 = L_4 \text{ donc}$$

$(B - I)$ n'est pas
inversible

donc 1 est une valeur propre de B

pour $\lambda = -1$:

$$B+I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : L_2 = L_3 \text{ donc}$$

$(B+I)$ n'est pas inversible

donc -1 est une valeur propre de B .

Réponse: $\boxed{\text{Sp}(B) = \{-1, 1\}}$

$$c) (B-I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x & -t = 0 \\ -y + z & = 0 \\ y - z & = 0 \\ -x & -t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = z \end{cases}$$

$$\text{Donc } E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ z \\ z \\ t \end{pmatrix}, (t, z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$\Leftrightarrow E_1 = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$\mathcal{Q}$ est génératrice de E_1 et contient 2 vecteurs, qui ne sont pas proportionnels donc $\mathcal{Q}$ est libre.

$$\text{Donc } \mathcal{Q} = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \text{ est une base de } E_1$$

Copie anonyme - n°anonymat : 816649

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths Appliquées - EM LYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$(B+I)X=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x & -t & =0 \\ y+z & & =0 \\ y+z & & =0 \\ -x & +t & =0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-z \end{cases}$$

$$\text{Donc } E_{-1} = \text{vect} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_F \right)$$

F est une famille génératrice de E_{-1} et

F est constituée de 2 vecteurs, qui ne sont pas proportionnels, donc :

$$F = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \text{ est une base de } E_{-1}$$

Exercice 3.

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$

X_k suit la loi uniforme $U([1, N])$

2) la commande `ajout(L, x)` rajoute à la liste L , x s'il ~~ne l'était~~ n'était pas encore dedans.
 ↳ si x .

3)

```
import numpy.random as rd

def Simul_T(N, i):
    L = []
    k = 0
    while len(L) < i - 1:
        x = rd.randint(1, N + 1)
        ajout(L, x)
        k = k + 1
    return k
```

4)

```
import numpy as np
J = []
for j in range(100):
    J.append(Simul_T(3, 2))
print(np.mean(J)).
```

Le résultat obtenu représente ~~la valeur moyenne~~
le nombre moyen ~~sur 1~~, estimé avec 100 expériences,
de lancers qu'il faut pour obtenir 2 numéros distincts
 lorsque l'on pioche dans une urne un numéro parmi
 trois de manière uniforme.

Partie B:

5) $T_2(\Omega) = \prod_{i=1}^{\infty} \{2, \text{too}\}$ car on peut obtenir
 2 boules différentes en 2 lancers mais on peut aussi piocher sans
 cesse la même boule

6) Soit $k \geq 2$, un entier fixé.

$$a) \left[T_2 = k \right] \cap [X_1 = 1] = [X_1 = 1] \cap [X_2 = 1] \cap \dots \cap [X_{k-1} = 1] \\ \cap [X_k \neq 1]$$

b) Les tirages s'effectuent avec remise donc
 les événements $[X_1 = 1], [X_2 = 1], \dots, [X_{k-1} = 1]$ et $[X_k \neq 1]$
 sont indépendants.

$$\text{Donc: } P(T_2 = k) \cap (X_1 = 1) = P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1) \cdot \dots \\ \dots \cdot P(X_{k-1} = 1) \cdot P(X_k \neq 1) \\ = \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{3}}_{(k-1) \text{ fois}} \cdot \frac{2}{3}$$

Donc: $\boxed{P(T_2 = k) \cap (X_1 = 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{2}{3}}$

c) $[X_1 = 1], [X_1 = 2]$ et $[X_1 = 3]$ forment un système complet d'événements. La formule des probabilités totales nous donne alors:

$$P(T_2 = k) = P(X_1 = 1) \cdot P_{X_1}$$

$$\begin{aligned} P(T_2 = k) &= P((T_2 = k) \cap (X_1 = 1)) + P((T_2 = k) \cap (X_1 = 2)) + \\ &\quad P((T_2 = k) \cap (X_1 = 3)) \\ &= 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(T_2 = k) = \frac{2}{3^{k-1}}}$$

7) T_2 admet une espérance si et seulement si:

$\sum_{k \geq 2} \frac{k}{3^{k-1}}$ converge absolument. (est une série d' termes pos.ifs donc la convergence absolue revient à la convergence simple.)

$$G_n: \frac{k}{3^{k-1}} = 2 \cdot k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \quad \text{dérivée première}$$

Gn: $\sum k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ est une série géométrique, et

$\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ donc elle converge.

$$\text{et } \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Copie anonyme - n°anonymat : 816649

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths Appliquées EN-LYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Et donc : ~~$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2k}{3^{k-1}}$~~ converge.

Donc T_2 admet une espérance.

$$\begin{aligned} \text{Et } E(T_2) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2k}{3^{k-1}} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k}{3^{k-1}} - \frac{2}{3^0} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - 2 \\ &= 2 \cdot \frac{9}{4} - 2 \\ &= \frac{9}{2} - 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E(T_2) = \frac{5}{2}$$

8) Comme $T_2(\omega) = \Pi_2, \text{ tout } \omega$, $Z_2(\omega) = \Pi_2$.

$$\begin{aligned} \text{et pour } k \geq 1, P(Z_2 = k) &= P(T_2 = k+1) \\ &= \frac{2}{3^k} \end{aligned}$$

donc, pour $k \geq 1$, $P(Z_2 = k) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$
 $\Leftrightarrow P(Z_2 = k) = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{k-1}$

Alors, Z_2 suit la loi géométrique $\mathcal{G}_1\left(\frac{2}{3}\right)$

Donc, $E(Z_2) = \frac{3}{2}$ et $V(Z_2) = \frac{1 - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}$
 $= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}$
 $= \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$
 $\Leftrightarrow V(Z_2) = \frac{2}{4}$

Alors, par linéarité de l'espérance,

$$E(T_2) = E(Z_2 + 1)$$

$$= E(Z_2) + 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E(T_2) = \frac{5}{2}}$$

Et, par quadratie de la variance,

$$V(T_2) = V(Z_2 + 1) = 1^2 \cdot V(Z_2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{V(T_2) = \frac{3}{4}}$$

Partie C:

9) Soit $i \in [2, N]$.

a) Z_i est le temps d'attente pour avoir un numéro distinct des numéros déjà tombés.

- Les tirages sont identiques et indépendants.

- La probabilité d'obtenir un numéro qui n'est pas encore tombé s'obtient en faisant le quotient entre le nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles.

Il y a N boules dans l'urne, donc il y a N cas possibles.

et le nombre de cas possibles correspond au nombre de boules dans l'urne (N) - le nombre de ~~numéros~~ numéros de boules déjà tombés, c'est-à-dire $N - i + 1$.

Donc Z_i suit bien la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{N-i+1}{N}\right)$.

b) $E(Z_i) = \frac{N}{N-i+1}$ pour $i \geq 2$.

pour $i=1$, $Z_i=1$ donc $E(Z_1)=1$

et $\frac{N}{N-1+1} = \frac{N}{N} = 1$ donc la formule reste vraie pour $i=1$

Pour $i \geq 2$:

$$V(Z_i) = \frac{1 - \frac{N-i+1}{N}}{\left(\frac{N-i+1}{N}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow V(Z_i) = \frac{\frac{N - N + i - 1}{N}}{\frac{(N - i + 1)^2}{N^2}}$$

$$= \frac{i - 1}{\frac{(N - i + 1)^2}{N}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{V(Z_i) = \frac{N(i - 1)}{(N - i + 1)^2}}$$

et pour $i = 1$, $V(Z_1) = 0$ car Z_1 est une variable certaine

$$\text{et } \frac{N(1 - 1)}{(N - 1 + 1)^2} = 0$$

donc la relation reste vraie pour $i = 1$

10) Soit $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$T_i = T_{i-1} + Z_i$$

$$= T_{i-2} + Z_{i-1} + Z_i$$

$$= T_{i-3} + Z_{i-2} + Z_{i-1} + Z_i$$

$\vdots$

$$= T_{i-N+1} + Z_{i-N+2} + \dots + Z_i$$

$$= T_1 + Z_2 + \dots + Z_i$$

$$\Leftrightarrow \boxed{T_i = 1 + \sum_{k=2}^i Z_k}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 816649

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths Appliquées EM LYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

11) a) pour tous l et k dans M^* :

Comme Z_2 et Z_3 sont indépendantes (d'après l'énoncé),

$$\begin{aligned} P(Z_2 = l) P(Z_3 = k) &= P(Z_2 = l) \cdot P(Z_3 = k) \\ &= \frac{N-2+1}{N} \left(1 - \frac{N-2+1}{N}\right)^{l-1} \\ &\quad \cdot \frac{N-3+1}{N} \left(1 - \frac{N-3+1}{N}\right)^{k-1} \\ &= \frac{N-1}{N} \left(\frac{1}{N}\right)^{l-1} \cdot \frac{N-2}{N} \left(\frac{2}{N}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(Z_2 = l) P(Z_3 = k) = \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} \left(\frac{1}{N}\right)^{l-1} \left(\frac{2}{N}\right)^{k-1}$$

b) $\{Z_2 = l\}_{l \in M^*}$ forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales nous donne alors :

$$\begin{aligned}
 P(Z_2 + Z_3 = m) &= \sum_{l=1}^m (P(Z_2 = l) \cap [Z_3 = m-l]) \\
 &= \sum_{l=1}^m \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} \left(\frac{1}{N}\right)^{l-1} \left(\frac{2}{N}\right)^{m-l-1} \\
 &= \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} \cdot \left(\frac{2}{N}\right)^m \cdot \sum_{l=1}^m \left(\frac{1}{N}\right)^{l-1} \cdot \left(\frac{2}{N}\right)^{-l-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Or: } \left(\frac{1}{N}\right)^{l-1} \cdot \left(\frac{2}{N}\right)^{-l-1} &= \left(\frac{1}{N}\right)^l \cdot N \cdot \left(\frac{N}{2}\right)^{l+1} \\
 &= \left(\frac{1}{N}\right)^l \cdot N \cdot \left(\frac{N}{2}\right)^l \cdot \frac{N}{2} \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^l \cdot \frac{N^2}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Alors, } P(Z_2 + Z_3 = m) = \frac{(N-1)(N-2)}{2} \cdot \left(\frac{2}{N}\right)^m \cdot \sum_{l=1}^m \left(\frac{1}{2}\right)^l$$

$$\text{or } \sum_{l=1}^m \left(\frac{1}{2}\right)^l = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{m-1}}$$

Mon raisonnement a abouti pas.

$$c) T_3 = 1 + Z_1 + Z_2$$

$$\text{Comme } Z_1(\Omega) = \{1\}, Z_2(\Omega) = N^*$$

Alors, $\boxed{T_3(\Omega) = [3, +\infty]}$

et, pour tout $n \geq 3$:

$$P(T_3 = n) = P(Z_2 + Z_3 = n - 1)$$

$$\Rightarrow P(T_3 = n) = \frac{(N-1)(N-2)}{2} \left(\left(\frac{2}{N} \right)^{n-1} - \frac{2}{N^{n-1}} \right)$$

En effet, comme la relation de la question est vraie à la question 11)b) pour $n \geq 4$, alors on peut la perdre pour $n-1$ dans cette question car le n est plus grand ou égal à 3.

12) Soit $i \in [1, N]$,

$$T_i = 1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_i \quad (\text{d'après la question 10})$$

donc par linéarité de l'espérance,

$$E(T_i) = 1 + \sum_{k=2}^i E(Z_k)$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^i \frac{N}{N-k+1}$$

$$= 1 + N \cdot \sum_{k=2}^i \frac{1}{N-k+1}$$

Et on pose $j = N - k + 1$.

~~Alors, i "devient"~~

$$\begin{aligned}\text{Alors, } E(T_i) &= N \cdot \sum_{j=N-i+1}^{N-1} \left(\frac{1}{j} \right) + 1 \\ &= N \left(\sum_{j=N-i+1}^{N-1} \left(\frac{1}{j} \right) + \frac{1}{N} \right)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E(T_i) = N \cdot \sum_{k=N-i+1}^N \left(\frac{1}{k} \right)}$$

13) Soient i et j deux entiers tels que
 $1 \leq i \leq j \leq N$:

D'après la formule de Koening - Huygens :

$$\text{cov}(T_i, T_j) = E(T_i \cdot T_j) - E(T_i) \cdot E(T_j)$$

et si X est une variable aléatoire qui admet un moment d'ordre 2, alors $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Donc cela veut peut-être dire que T_i soit égale à T_j .