

# Copie anonyme - n°anonymat : 816649



E6-00243

816649

Mat Appli

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 32

Session : 2024

Épreuve de : Maths Appliquées EDHEC

## Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

## Exercice 1 :

Soit  $x \in [0, 1]$  :

$$\frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4-x^2} = \frac{a(2+x) + b(2-x)}{(2-x)(2+x)}$$

$$\Leftrightarrow 1 = 2a + ax + 2b - bx$$

$$\Leftrightarrow 1 = x(a-b) + 2a + 2b$$

Alors, par identification des coefficients, on a :

$$\begin{cases} a-b=0 \\ 2a+2b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ 4a=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Alors,

$$\frac{1}{4-x^2} = \frac{\frac{1}{4}}{2-x} + \frac{\frac{1}{4}}{2+x}$$

$$\begin{aligned}
 b) u_0 &= \int_0^1 \frac{1}{4-x^2} dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2-x} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2+x} \right) dx \\
 &= \frac{1}{4} \left( \int_0^1 \frac{1}{2-x} dx + \int_0^1 \frac{1}{2+x} dx \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left( \left[ -\ln(2-x) \right]_0^1 + \left[ \ln(2+x) \right]_0^1 \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left( -\ln(1) + \ln(2) + \ln(3) - \ln(2) \right)
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_0 = \frac{1}{4} \ln(3)}$$

$$\begin{aligned}
 2) u_1 &= \int_0^1 \frac{x}{4-x^2} dx = \int_0^1 -\frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{4-x^2} dx \\
 &= -\frac{1}{2} \left[ \ln(4-x^2) \right]_0^1 \\
 &= -\frac{1}{2} \left( \ln(3) - \ln(4) \right)
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_1 = \frac{1}{2} \left( \ln(2) - \ln(3) \right)}$$

3/a) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ :

$$4u_n - u_{n+2} = 4 \cdot \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx - \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{4-x^2} dx$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow 4U_n - U_{n+2} &= \int_0^1 \frac{4x^n - x^{n+2}}{4 - x^2} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{x^n(4 - x^2)}{4 - x^2} dx \\
 &= \int_0^1 x^n dx
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{4U_n - U_{n+2} = \frac{1}{n+1}}$$

b) for  $k$  in range  $(2, n+1, L)$ :

$$\boxed{U = 4^k U - 1/(n+1)}$$

for  $k$  in range  $(3, n+1, L)$ :

$$\boxed{U = 4^k U - 1/(n+1)}$$

4) pour tout  $x \in [0, 1]$ :

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq -x^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow 3 \leq 4 - x^2 \leq 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4 - x^2} \leq \frac{1}{3}$$

et en multipliant par  $x^n \geq 0$ , on a:

$$\frac{x^n}{4} \leq \frac{x^n}{4 - x^2} \leq \frac{x^n}{3}$$

Enfin, en intégrant de 0 à 1 (avec  $0 \leq 1$ ), on a

$$\frac{1}{4} \int_0^1 x^n dx \leq U_n \leq \frac{1}{3} \int_0^1 x^n dx$$

On a alors, 
$$\boxed{\frac{1}{4(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{3(n+1)}}$$

b) Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4(n+1)} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3(n+1)} = 0$

Alors, d'après le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

c) Comme  $u_n \leq \frac{1}{3(n+1)}$  et  $u_n \geq 0$

et qu'en voisinage de  $+\infty$ ,  $\frac{1}{3(n+1)} \sim \frac{1}{3n} > 0$

et que  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est une série de Riemann qui diverge,  
alors par la régle d'équivalence,  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{3(n+1)}$  diverge.

Donc d'après la régle de comparaison pour les

séries à termes positifs:  $\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$

5/a) Comme, d'après le programme, on peut considérer que  $3n \cdot u_n$  tend vers 1 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , on a donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{1/3n} = 1$  donc on peut conjecturer que:

$$\boxed{u_n \sim \frac{1}{3n}}$$

b)  $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx$ .

On pose  $v(x) = \frac{1}{4-x^2}$

$v'(x) = x^n$

$\Rightarrow v'(x) = -\frac{-2x}{(4-x^2)^2}$

$\Leftrightarrow v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

# Copie anonyme - n°anonymat : 816649

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 2024

Emplacement  
QR Code

Épreuve de :

Maths Appliquées ED+EC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$

$$\text{Donc on a : } u_n = \left[ \frac{1}{4-x^2} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{(4-x^2)^2} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} dx$$

Comme  $n \geq 0$ ,  $n+1 \neq 0$ , donc  $0^{n+1} = 0$

$$\text{et on a : } u_n = \frac{1}{3(n+1)} - 0 - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx}$$

c) pour tout  $x \in [0, 1]$  :

$$3 \leq 4-x^2 \leq 4 \quad (\text{d'après question 4})$$

$$\text{donc } 0.25 \leq (4-x^2)^2 \leq 16$$

$$\Rightarrow \frac{1}{16} \leq \frac{1}{(4-x^2)^2} \leq \frac{1}{9}$$

et en multipliant par  $x^{n+2} \geq 0$ , on a :

$$\frac{x^{n+2}}{16} \leq \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} \leq \frac{x^{n+2}}{9}$$

En intégrant de 0 à 1 (avec  $0 \leq 1$ ), on a alors :

$$\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{16} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{9} dx$$

$$\text{or } \int_0^1 x^{n+2} dx = \left[ \frac{x^{n+3}}{n+3} \right]_0^1 = \frac{1}{n+3}$$

donc finalement, on a :

$$\frac{1}{16(n+3)} \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx \leq \frac{1}{9(n+3)}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{16(n+3)} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{9(n+3)} = 0$$

donc d'après le théorème d'encadrement, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx = 0$$

d) Alors, d'après 5)b), on a

$$0_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$$

on a donc 
$$\frac{U_n}{\frac{1}{3n}} = 3n \cdot U_n$$

$$= \frac{3n}{3(n+1)} - \frac{3n}{n+1} \cdot \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$$

et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n+1} = 3$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx = 0$

et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{3n+3} = 1$

Alors, on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{\frac{1}{3n}} = 1$

donc 
$$U_n \sim \frac{1}{3n}$$

## Exercice 2 :

1) a) •  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$

• Positivité :

Si  $x < 0$ ,  $f(x) = 0 \geq 0$

Si  $x \geq 0$ ,  $f(x) = x \cdot e^{-x^2/2} \geq 0$  (car  $x \geq 0$ )

Donc  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$

•  $f$  est clairement continue sur  $\mathbb{R}$  sauf éventuellement en 0

• Etude de  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ .

$$\int_{-\infty}^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx \quad \underline{\text{converge et vaut 0}}$$

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x^2/2} dx.$$

Calculons, pour tout  $t \in [0, +\infty[$ :

$$\begin{aligned} \int_0^t x e^{-x^2/2} dx &= \left[ -e^{-x^2/2} \right]_0^t \\ &= -e^{-t^2/2} + 1 \end{aligned}$$

$$\text{et } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t^2/2} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t x e^{-x^2/2} dx = 1$$

Donc  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  converge et vaut 1

Bilan:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  converge et vaut 0+1=1

Les 4 points établissent que  $f$  est une densité d'une variable aléatoire  $X$ .

b)  $f$  est la loi normale centrée réduite,

$$E(Y) = 0 \text{ et } V(Y) = 1$$

Et d'après la formule de Koenig-Huygens:

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

$$\Leftrightarrow 1 = E(Y^2) - 0$$

Donc le moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire suit la loi normale centrée réduite vaut 1.

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths Appliquées EDHEC

## Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

c)  $X$  admet une espérance si et seulement si  $\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$  converge absolument.

Or :  $\int_{-\infty}^0 x \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx$  converge absolument et vaut 0.

Et  $\int_0^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x^2/2} dx$ .

Or,  $x^2 \cdot e^{-x^2/2} \geq 0$  donc la convergence absolue équivaut à la convergence simple.

et  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$  est la densité d'une variable suivant une loi normale centrée réduite  $Y$

Et on vient de montrer à la question précédente que  $E(Y^2)$  existe et  $E(Y^2) = 1$ .

et la fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$  est paire (car  $f(x)^2 = x^2$ )

Alors on a:  $\int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/2} dx$  qui converge et qui vaut  $\frac{1}{2}$ .

Donc en multipliant par  $\sqrt{2\pi}$ , on a:

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx \text{ qui converge et qui vaut } \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{2\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Ainsi,  $\int_0^{+\infty} x |f(x)| dx$  converge et vaut  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Alors,  $\int_{-\infty}^{+\infty} x |f(x)| dx$  converge absolument et vaut  $0 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Donc  $X$  a une espérance et  $E(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$$2) F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Que vaut  $f(t)$  entre  $-\infty$  et  $x$ ?

Si  $x < 0$ :

entre  $-\infty$  et  $x$ :

$$f(t) = 0 \text{ donc } F_X(x) = 0$$

Si  $x \geq 0$ :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{entre } -\infty \text{ et } 0 \\ t e^{-t^2/2} & \text{entre } 0 \text{ et } +\infty \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0$$

$$\text{et } \int_0^x t e^{-t^2/2} dt = \left[ -e^{-t^2/2} \right]_0^x \quad (\text{d'après 1)c})$$

$$= -e^{-x^2/2} + 1$$

$$\text{donc } F_x(x) = 0 + -e^{-x^2/2} + 1$$

Réponse:

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

3) a)  $Z = X^2$ .

On a alors:  $F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x^2/2})^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

ou  $(1 - e^{-x^2/2})^2 = 1 + e^{-x^2} - 2e^{-x^2/2}$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ :

$$F_Z(x) = P(Z \leq x)$$

$$= P(X^2 \leq x)$$

$$= P(|X| \leq \sqrt{x})$$

$$= P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x})$$

$$\Leftrightarrow F_Z(x) = P(X \leq \sqrt{x}) - P(X < -\sqrt{x})$$

et  $X$  est a' distrib, donc  $P(X = -\sqrt{x}) = 0$

$$\text{donc } F_Z(x) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$$

Or:  $\sqrt{x} \geq 0$  donc  $-\sqrt{x} \leq 0$

$$\text{donc } F_X(-\sqrt{x}) = 0 \quad (F_X \text{ \u00e9tant continue en } 0)$$

$$\text{donc } F_Z(x) = F_X(\sqrt{x}) \quad (\text{pour } x \geq 0 \text{ toujours})$$

$$= 1 - e^{-x/2}$$

$$= 1 - e^{-\frac{1}{2}x}$$

et si  $x < 0$ : comme  $Z = X^2$  et q'un carr\u00e9 est toujours positif, on a  $P(Z \leq x) = 0$

$$\text{Alors, on a: } F_Z(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{2}x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donc  $Z$  suit la loi exponentielle  $E(\frac{1}{2})$

b)

def simulX():

$Z = \text{rd.exponential}(1)$

return np.sqrt(Z)

# Copie anonyme - n°anonymat : 816649

Emplacement  
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths Appliquées EOHEC

## Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

4) a) pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ :

$$G_n(x) = P(Y_n \leq x)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}}{\sqrt{n}} \leq x\right)$$

$$= P(X \leq \sqrt{n} \cdot x) \quad \text{en multipliant par } \sqrt{n} > 0$$

$$= F_X(\sqrt{n} \cdot x)$$

$$\text{donc } G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sqrt{n} \cdot x < 0 \\ 1 - e^{-(\sqrt{n} \cdot x)^2/2} & \text{si } \sqrt{n} \cdot x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Or : comme } \sqrt{n} > 0, \sqrt{n} \cdot x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$\text{et } \sqrt{n} \cdot x < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

$$\text{et } e^{-(\sqrt{n} \cdot x)^2/2} = e^{-n \cdot x^2/2}$$

$$\text{Donc on a : } G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-n x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) Si  $x \leq 0$ ,  $G_n(x) = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = 0$

$$\text{Si } x > 0, G_n(x) = 1 - e^{-n x^2 / 2}$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n x^2 / 2} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = 1$$

Alors  $\left( \begin{pmatrix} X \\ n \end{pmatrix} \right)_n$  converge en loi vers une variable

$V$  où  $V$  est une variable indicatrice avec

$$F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

c)

5) pour tout  $x \in \mathbb{R}$ :

par définition d'un minimum,  $[M_n > x] = [X_1 > x] \cap \dots \cap [X_n > x]$

où les  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes donc on a:

$$\begin{aligned}
 P(M_n > x) &= P(X_1 > x) \cdot \dots \cdot P(X_n > x) \\
 &= (P(X > x))^n \\
 &= (1 - P(X \leq x))^n
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P(M_n > x) = (1 - F_X(x))^n}$$

$$\text{donc } P(M_n \leq x) = 1 - (1 - F_X(x))^n$$

Si  $x < 0$ :

$$F_X(x) = 0 \text{ donc } (1 - F_X(x))^n = 1^n = 1$$

$$\text{donc } P(M_n \leq x) = 0$$

Si  $x \geq 0$ :

$$(1 - F_X(x))^n = (1 - 1 + e^{-x^2/2})^n = e^{-n \cdot x^2/2}$$

$$\text{donc } P(M_n \leq x) = 1 - e^{-n \cdot x^2/2}$$

$$\text{Bilan: } P(M_n \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-n \cdot x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = G_n(x)$$

donc  $M_n$  et  $Y_n$  suivent la même loi.

b) 

```
def simulM(n):
    X = np.array([simulX() for k in range(n)])
    M = np.min(X)
    return M
```

### Exercice 3:

1) Nous voulons montrer que  $\int_0^x t \cdot f(x-t) dt = \int_0^x (x-u) f(u) du$

Poseons  $u = x - t \Leftrightarrow t = x - u$

donc  $dt = -du$  : changement variable affine de classe  $C^1$ .

$$t \cdot f(x-t) = (x-u) f(u)$$

et si  $t$  varie  $\int_0^x$ ,  $u = x - t$  varie  $\int_x^0$

$$\begin{aligned} \text{Alors, on a } \int_0^x t \cdot f(x-t) dt &= \int_x^0 -(x-u) f(u) du \\ &= \int_0^x (x-u) f(u) du \end{aligned}$$

$$\text{Donc on a bien: } \boxed{f(x) = 1 + \int_0^x t \cdot f(x-t) dt = 1 + \int_0^x (x-u) f(u) du}$$

2) Si  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , alors

$u \mapsto (x-u) f(u)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Donc elle admet une primitive

En particulier,  $x \mapsto \int_0^x (x-u) f(u) du$  est la primitive de la fonction  $u \mapsto (x-u) f(u)$ , qui s'annule en  $x$ .

et donc, comme  $(x-u) f(u)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $\boxed{f}$   
est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

# Copie anonyme - n°anonymat : 816649

Emplacement  
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths Appliquées EOAE

## Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Noter  $H$ , la primitive de  $u \mapsto (x-u) f(u)$ .

$$\text{On a : } f(x) = 1 + H(x) - H(0)$$

$$\text{Et } f'(x) = H'(x) - H'(0)$$

x

b) Comme  $f$  est de classe  $C^1$ ,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc elle admet une primitive que l'on

$$\text{note } G. \quad f'(x) = [G(x)]' = G(x) - G(0): f' \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\text{Et } f''(x) = G'(x) - G'(0)$$

donc  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$

$$= 1 \cdot f(x) - 0 \cdot f(0)$$

$$\Leftrightarrow f''(x) = f(x)$$

$$c) \quad f''(x) - f(x) = 0 \quad (E).$$

L'équation caractéristique de cette équation homogène est :

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 1$$

Alors, l'équation caractéristique a 2 racines:  $-1$  et  $1$ .

Donc les solutions de (E) sont les fonctions  $f$  telles que:  $f(u) = Ae^{-u} + Be^u$  avec  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ .

$$d) \quad f(0) = 1 + \int_0^0 f(0-t) dt$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f(0) = 1}$$

$$f'(0) = \int_0^0 f(u) du$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f'(0) = 0}$$

Alors, nous avons un problème de Cauchy. Si

l'on reprend l'ensemble des solutions  $f$  de la question 2)c), on a le système suivant:

$$\begin{cases} Ae^{-0} + Be^0 = 1 \\ -Ae^{-0} + Be^0 = 0 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} A + B = 1 \\ -A + B = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 1 \\ A = B \end{cases}$$

$$E) \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Alors, la solution de ce problème de Cauchy est unique et est la fonction  $f$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{1}{2} e^x = \frac{e^{-x} + e^x}{2}$$

3) Nous venons de montrer que  $f$  était unique.

$$et \quad 1 + \int_0^x t \cdot \frac{e^{x-t} + e^{t-x}}{2} dt$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \left( \int_0^x t e^{x-t} dt + \int_0^x t e^{t-x} dt \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \left( \int_0^x e^x \cdot t e^{-t} dt + \int_0^x t e^t dt \right)$$

En intégrant par parties les 2 intégrales, on pourra peut-être obtenir le résultat attendu.

4) Les questions 2/a), 2/b) et 2/c) restent valables.

Mais, ici,  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 0$

Alors, nous avons un nouveau problème de Cauchy

qui possède donc une unique solution que l'on va déterminer.

Il faut résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$$

Donc l'unique solution  $f$  de ce problème est définie par:  
 $f(x)=0$  pour  $x \in \Omega$ .

Problème:

$$1) a) \begin{cases} a_0 = P(X_0=0) = 0 \\ b_0 = P(X_0=1) = 1 \\ c_0 = P(X_0=2) = 0 \end{cases}$$

$$b) \underline{X_1(\Omega) = \{0, 1, 2\}}$$

$$\underline{\{X_1=0\} = \emptyset}$$

Soit  $A_m^N$  l'événement: "on tire une boule noire dans l'urne  $A$  à l'épreuve  $m$ "

et  $B_m^N$  l'événement: "on tire une boule noire dans l'urne  $B$  à l'épreuve  $m$ ".

$$\underline{\{X_1=1\}} = (A_1^N \cap B_1^N) \cup (\bar{A}_1^N \cap \bar{B}_1^N)$$

les événements sont incompatibles donc  $P(X_1=1) = P(A_1^N \cap B_1^N) + P(\bar{A}_1^N \cap \bar{B}_1^N)$

# Copie anonyme - n°anonymat : 816649

Emplacement  
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths Appliquées EDHEC

## Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

et l'événement  $A$  et l'événement  $B$  ne sont pas dépendants a priori.

$$\begin{aligned} \text{Donc } P(X_1=1) &= P(A_1^N) \cdot P(B_1^N) + P(A_1^{\bar{N}}) \cdot P(B_1^{\bar{N}}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow P(X_1=1) = \frac{1}{2}$$

$$[X_1=2] = A_1^N \cap B_1^{\bar{N}}$$

$$\text{donc par indépendance, } P(X_1=2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Alors, comme  $X_1(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ ,

$$P(X_1=0) = \frac{1}{4}$$

Bilan:  $X_1(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$$P(X_1=0) = \frac{1}{4} = P(X_1=2)$$

$$P(X_1=1) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{4} \\ b_1 &= \frac{1}{2} \\ c_1 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

c) Il y a 2 boules blanches au total dans notre problème, donc l'urne A peut avoir 0, 1 ou 2 boules blanches.

Donc  $\{X_n = 0\}, \{X_n = 1\}, \{X_n = 2\}$  forme un système complet d'événements.

d) Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n + b_n + c_n = 1$

$$\text{car } P(X_n = 0) + P(X_n = 1) + P(X_n = 2) = 1.$$

2) Soit  $n \geq 0$ :

En reprenant notre raisonnement de la question 1b) pour trouver la loi de  $X_1$ , on a:

S:  $\{X_n = 0\}$ :

$$\{X_{n+1} = 0\} = A_n^N \cap B_n^N = \emptyset \quad (\text{car } B \text{ n'a pas de boule noire}).$$

$$\text{Donc } P(X_n = 0)(X_{n+1} = 0) = 0$$

$$\text{De la même manière, } P(X_n = 2)(X_{n+1} = 2) = 0$$

$$\text{et } P[X_n = 0](X_{n+1} = 2) = 0$$

$$\text{et } P[X_n = 1](X_{n+1} = 0) = 0$$

car on ne peut pas

déplacer 2 boules à la fois en une épreuve d'une urne à une autre.

~~Si  $X_n = 0$ :~~

~~$X_{n+1} = 1 = A_n \cap A_B$~~

Cela donne:  $P[X_n = 0](X_{n+1} = 1) = 1$

et  $P[X_n = 1](X_{n+1} = 1) = 1$

Il nous reste le cas où  $X_n = 1$ :

Nous avons une situation analogue de  $X_0$ . Donc en représentant la même linéarité pour trouver  $X_1$  on a:

$$P[X_n = 1](X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4}$$

$$P[X_n = 1](X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}$$

$$P[X_n = 1](X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4}$$

), Cui, le graphe, au vue des résultats que l'on vient d'obtenir, représente la chaîne de Markov du problème.

$$b) \quad M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 10 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \end{array} \right) \end{array}$$

c)  $(a_n, b_n, c_n)$  forme un système complet d'événements, on a donc par la formule des probabilités totales que :

$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(X_{n+1} = 0) &= P(X_n = 0) \cdot P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 0) \\ &\quad + P(X_n = 1) \cdot P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 0) \\ &\quad + P(X_n = 2) \cdot P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 0) \\ &= a_n \cdot 0 + b_n \cdot 1 + c_n \cdot 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_{n+1} = \frac{1}{2} b_n}$$

De la même façon, on a :  $\boxed{b_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{4} c_n}$

$$\text{et } \boxed{c_{n+1} = \frac{1}{2} b_n}$$

# Copie anonyme - n°anonymat : 816649

Code épreuve : 288

Nombre de pages :

Session : 2026

Emplacement  
QR Code

Épreuve de : Maths Appliquées ED+EC

## Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

3) pour  $n=0$ , nous recherchons  $a_1$ ,  $b_1$  et  $c_1$   
d'après 1)b),  $a_1 = \frac{1}{4}$ ,  $b_1 = \frac{1}{2}$  et  $c_1 = \frac{1}{4}$ .

et d'après 1)a),  $a_0 = 0$ ,  $b_0 = 1$  et  $c_0 = 0$

donc on a bien:  $a_1 = \frac{1}{2} b_0$

$$c_1 = \frac{1}{2} b_0$$

$$\text{et } b_1 = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Donc la relation reste vraie pour  $n=0$ .

4)a). par tout  $n \in \mathbb{N}$ :

$$E(X_{n+1}) = 0 \cdot P(X_{n+1}=0) + 1 \cdot P(X_{n+1}=1) + 2 \cdot P(X_{n+1}=2)$$

$$\hookrightarrow E(X_{n+1}) = b_{n+1} + 2c_{n+1}$$

b)

$$\text{donc } E(X_{n+1}) = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{4} c_n + b_n$$

$$\Leftrightarrow E(X_{n+1}) = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}b_n$$

$$\Leftrightarrow E(X_{n+1}) = b_{n+1} + a_{n+1} + c_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E(X_{n+1}) = 1} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

c) Alors, pour  $n \geq 1$ ,  $E(X_n) = 1$  donc  $\boxed{b_n + 2c_n = 1}$

et pour  $n = 0$ ,

~~$$\begin{aligned}
 E(X_0) &= 0 \cdot a_0 + 1 \cdot b_0 + 1 \cdot c_0 \\
 &= 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\
 &\leq 1
 \end{aligned}$$~~

donc on a bien:  $b_0 + 2c_0 = 1 + 2 \cdot 0$

$$\Leftrightarrow b_0 + 2c_0 = 1$$

Donc la relation reste vraie pour  $n = 0$ .

Ainsi:  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, b_n + 2c_n = 1}$

5) a)

pour  $n \in \mathbb{N}$ :  $U_n \cdot V = (a_n \ b_n \ c_n) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow U_n \cdot V = 2a_n - b_n + 2c_n$$

$$= b_{n-1} - b_n + b_{n-1}$$

8) a)  $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ex)  $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ex)  $M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Donc  $M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

et  $M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

donc  $M^3 = M^2 + M$

b) Alors,  $Q(x) = 2x^3 - x^2 - x$

$$2M^3 - M^2 - M = 0$$

et  $Q(x) = 2x^3 - x^2 - x$  est un polynôme annulateur de  $M$ .

les valeurs propres de  $M$  sont donc à rechercher parmi les racines de  $Q$ .

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x^2+x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } 2x^2+x=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x(2x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=0 \text{ ou } x=-\frac{1}{2}.$$

Vérifions cela :

$$(M - I)X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } (M - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

# Copie anonyme - n°anonymat : 816649

Emplacement  
QR Code

Code épreuve : 198

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths Appliquées EDHEC

## Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y = z \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Il existe une} \\ \text{solution} \\ \text{non nulle donc} \\ A - I \text{ n'est pas inversible.} \end{array}$$

Donc 1 est valeur propre de M

et on a, en poursuivant le système :

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

donc le sous-espace propre de M associé à la valeur propre 1 est :

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{donc } E_1 = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est une famille génératrice et ne contient qu'un seul vecteur, qui est non nul, donc

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est libre.

Donc  $\left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$  est une base de  $E_1$

$$\left(M + \frac{1}{2}I\right)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} +\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & +\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} +x + 2y = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

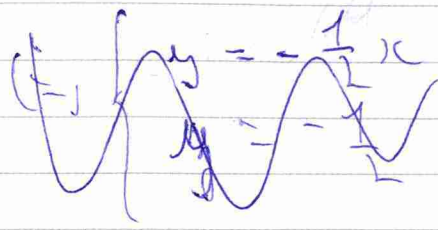
$$\Leftrightarrow \begin{cases} +x + 2y = 0 \\ \quad 2y + z = 0 \\ \quad 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} +x + 2y = 0 \\ \quad 2y + z = 0 \\ \quad -2y = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$\left(M + \frac{1}{2}I\right)$  est positive définie donc

$-\frac{1}{2}$  est bien valeur propre de  $M$

on a :

et  $\begin{cases} 2y = -x \\ 2y = -z \end{cases}$  

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = -2y \end{cases}$$

donc  $E_{-\frac{1}{2}} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$

Pour les mêmes arguments qu'avant,

$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  est une base de  $E_{-\frac{1}{2}}$

Enfin,  $M \cdot X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

Il y a des solutions non nulles donc

$0$  est valeur propre de  $M$

et  $E_0 = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Encore une fois pour les mêmes arguments

(libre et génératrice),  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  est une base de  $E_0$

c)  $P$  est construite par colonnes avec les vecteurs propres des espaces propres de  $M$ .

Car une combinaison de familles libres issues de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est encore une famille libre.

Donc les colonnes de  $P$  sont libres

Donc  $P$  est inversible

$$d) P \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = PD$$

$$MP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = MP$$

$$MP = PD \Leftrightarrow M \cdot PP^{-1} = PDP^{-1}$$

$$\Leftrightarrow M = PDP^{-1}$$

avec  $P$  une matrice inversible et  $D$  une matrice diagonale avec comme coefficients diagonaux des valeurs propres de  $M$ .

donc  $M$  est diagonalisable