

# Copie anonyme - n°anonymat : 871425



V6-00095  
871425  
Mat Appli

Code épreuve : 236

Nombre de pages : 12

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Appliquées emlyon

## Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

exercice 1:

1. a)  $S_0 = \{t \rightarrow \lambda e^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

b)  $x(t) = (at+b)e^{-t}$   
 $x'(t) = -(at+b)e^{-t} + a e^{-t}$

$$x'(t) = -x(t) + e^{-t} \Leftrightarrow -(at+b)e^{-t} + a e^{-t} = -(at+b)e^{-t} + e^{-t}$$

$$\Leftrightarrow a e^{-t} = e^{-t} \Leftrightarrow a = 1 \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

donc  $S_0 = \{t \rightarrow (t+b)e^{-t} \mid b \in \mathbb{R}\}$

c)  $S = \{t \rightarrow \lambda e^{-t} + (t+\mu)e^{-t} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

2. a)  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\gamma_p(A) = \{-1\}$  car  $A$  est triangulaire supérieure

Supposons  $A$  diagonalisable.

Alors  $A = PDP^{-1}$  avec  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$

$A = PDP^{-1} = -PI_2P^{-1} = -I_2$  or  $A \neq -I_2$  donc

$A$  n'est pas diagonalisable

b) On reconnaît un problème de Cauchy donc il n'y a qu'une seule solution pour (S) avec  $x(0)=1$  et  $y(0)=1$

$$c) \begin{cases} x(0) = (0+\mu)e^0 + \lambda e^0 = \mu + \lambda = 1 \\ y(0) = \lambda e^0 = \lambda = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

donc  $x(t) = e^{-t} + te^{-t} = \boxed{(t+1)e^{-t}}$  est l'unique solution

$$d) \lim_{t \rightarrow +\infty} (t+1)e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (te^{-t} + e^{-t}) = \boxed{0} \text{ par croissance comparées}$$

3.  $T = \text{np.linspace}(-2, 10, 200)$

$x = [(t+1) * \text{np.exp}(-t) \text{ for } t \text{ in } T]$

$y = [\text{np.exp}(-t) \text{ for } t \text{ in } T]$

$\text{plt.title("Trajectoire de la solution")}$

$\text{plt.plot}(x, y)$

$\text{plt.show}()$

$$4a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f_h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^{hx} = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{hx} = \boxed{0} \text{ par croissance comparées}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{hx} = \boxed{+\infty}$$

b)  $f_h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

$$f_h'(x) = h(x+1)e^{hx} + e^{hx} = e^{hx}(hx + h + 1)$$

$$hx + h + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{h+1}{h}$$

$\uparrow h > 0$

|           |           |                         |      |     |           |
|-----------|-----------|-------------------------|------|-----|-----------|
| $x$       | $-\infty$ | $-\frac{h+1}{h}$        | $-1$ | $0$ | $+\infty$ |
| $f_h'(x)$ | $-$       | $0$                     | $+$  |     |           |
| $f_h(x)$  | $0$       | $-\frac{e^{-(h+1)}}{h}$ | $0$  | $1$ | $+\infty$ |

$$f_h(-1) = 0$$

$$f_h(0) = 1$$

$$f_h\left(-\frac{h+1}{h}\right) = \left(-\frac{h+1}{h} + 1\right)e^{-\frac{(h+1)}{h}} = -\frac{e^{-(h+1)}}{h}$$



$$5a) \quad h < h+1 \Rightarrow xh < x(h+1) \Rightarrow e^{xh} < e^{x(h+1)} \Rightarrow f_h(x) < f_{h+1}(x)$$

si  $x > 0$

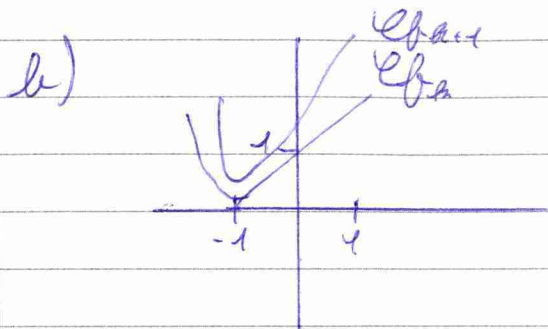
$$h < h+1 \Rightarrow xh > (h+1)x \Rightarrow e^{xh} > e^{x(h+1)} \Rightarrow f_h(x) < f_{h+1}(x)$$

si  $x < 0$

et  $f_h(x) = f_{h+1}(x)$  si  $x = 0$

donc  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ ,  $f_h(x) < f_{h+1}(x)$  et  $f_h(0) = f_{h+1}(0)$

donc  $\mathcal{C}_{h+1}$  est toujours au dessus de  $\mathcal{C}_h$  et les courbes se croisent en 0



6. a)  $f_h$  est continue et strictement croissante sur  $]-\frac{h+1}{h}, +\infty[$   
 donc  $f_h$  réalise une bijection de  $]-\frac{h+1}{h}, +\infty[$  dans  $]-\frac{e^{h+1}}{h}, +\infty[$   
 $h \in ]-\frac{e^{h+1}}{h}, +\infty[$  donc l'équation  
 $f_h(x) = h$  admet une unique solution  $u_h$  sur  $]-\frac{h+1}{h}, +\infty[$

$$\text{en } -\frac{h+1}{h}, f\left(-\frac{h+1}{h}\right) = -\frac{e^{h+1}}{h} \neq h$$

$f_h$  est continue et strictement décroissante sur  $]-\infty, -\frac{h+1}{h}[$   
 donc  $f_h$  réalise une bijection de  $]-\infty, -\frac{h+1}{h}[$  dans  $]-\frac{e^{h+1}}{h}, 0[$   
 mais  $h \notin ]-\frac{e^{h+1}}{h}, 0[$

donc l'équation  $f_h(x) = h$  n'admet qu'une seule solution sur  $\mathbb{R}$  notée  $u_h$

$$b) \quad f_h(u_h) = (u_h + 1)e^{u_h} = 1 = f_h(0) \Rightarrow \boxed{u_h = 0} \text{ car } f_h \text{ réalise une bijection sur } ]-\frac{h+1}{h}, +\infty[$$

$$7. \quad 1 \leq h \leq h \left( \frac{\ln(h)}{h} + 1 \right) \text{ car } \frac{\ln(h)}{h} > 0 \text{ car } h > 1$$

$$\Rightarrow f_h(0) \leq f_h(u_h) \leq f_h\left(\frac{\ln(h)}{h}\right) \Rightarrow \boxed{0 \leq u_h \leq \frac{\ln(h)}{h}} \quad \text{car } f_h \text{ est croissante sur } ]-\frac{h+1}{h}, +\infty[$$

$\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{\ln(h)}{h} = 0$  par croissances comparées

donc par encadrement,  $\lim_{h \rightarrow +\infty} u_h = 0$

$$8a) f_h(u_h) = (u_h + 1)e^{hu_h} = h \Leftrightarrow e^{hu_h} = \frac{h}{u_h + 1} \Leftrightarrow hu_h = \ln\left(\frac{h}{u_h + 1}\right)$$
$$\Leftrightarrow u_h = \frac{1}{h} (\ln(h) - \ln(u_h + 1)) = \frac{\ln(h)}{h} - \frac{\ln(u_h + 1)}{h}$$

$$b) \lim_{h \rightarrow +\infty} u_h = 0 \text{ donc par composition, } \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_h + 1)}{h} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{h \rightarrow +\infty} u_h = \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{\ln(h)}{h} + 0 \Rightarrow u_h \sim \frac{\ln(h)}{h}$$

$$9. u_h \sim \frac{\ln(h)}{h} \text{ et } \frac{\ln(h)}{h} > \frac{1}{h}$$

$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h}$  est une série de Riemann de paramètre  $1 \leq 1$   
donc elle diverge

Par comparaison de séries divergente de terme général positif,  $\sum_{h=1}^{\infty} u_h$  diverge

exercice 2:

$$1. A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2 \Leftrightarrow -A^2 = I_2 \text{ donc } A \text{ est inversible et}$$

$$A^{-1} = -A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2. A^2 = -I_2 \Leftrightarrow A^2 + I_2 = 0$$

donc  $P(X) = X^2 + 1$  est polynôme annulateur de  $A$

or  $P(X) > 0 \forall X \in \mathbb{R}$  donc  $\mathcal{P}_p(A) = \{\emptyset\}$  donc  $A$   
n'est pas diagonalisable

$$3. \mathcal{C} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$$- A Q = Q = Q A \text{ donc } Q \in \mathcal{C} \text{ donc } \mathcal{C} \neq \{\emptyset\}$$

$$- \text{Soit } \lambda \in \mathbb{R}, M, N \in \mathcal{C}$$

$$A(\lambda M + N) = A\lambda M + AN = \lambda AM + AN = \lambda MA + NA = (\lambda M + N)A$$

$$\text{donc } (\lambda M + N) \in \mathcal{C}$$

donc  $\mathcal{C}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$



# Copie anonyme - n°anonymat : 871425

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 12

Session : 2024

Emplacement  
QR Code

Épreuve de : Mathématiques Appliquées en Lyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$4a) M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad AM = MA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -c = b \\ -d = -a \\ a = d \\ b = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases} \text{ donc } M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}$$

b)  $(I_2, A)$  est libre car de deux vecteurs non colinéaires

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}(I_2, A)$$

donc  $(I_2, A)$  est générateur de  $\mathcal{C}$

donc  $(I_2, A)$  est une base de  $\mathcal{C}$ .

$$5.a) AMN = MAN = MNA \text{ donc } \boxed{MN \in \mathcal{C}}$$

$\hat{M} \in \mathcal{C} \quad \hat{N} \in \mathcal{C}$

$$b) \boxed{MN} = (aI_2 + bA)N = aN + bAN = aN + bNA = N(aI_2 + bA) = \boxed{NM}$$

$\hat{N} \in \mathcal{C}$

6.  $M = aI_2 + bA$  or  $I_2$  et  $A$  sont inversibles donc par somme de matrice inversible,  $M$  est inversible

$$\boxed{AM^{-1}} = (MA^{-1})^{-1} = (-MA)^{-1} = - (AM)^{-1} = M^{-1}A^{-1} = \boxed{M^{-1}A} \text{ donc } M^{-1} \in \mathcal{C}$$

$\uparrow$   
 $M \in \mathcal{C}$

$$7a) M^2 = (aI_2 + bA)^2 = a^2I_2 + 2abA + b^2A^2 = a^2I_2 + 2abA - b^2I_2 \quad \text{car } A^2 = -I_2$$

$$= \boxed{(a^2 - b^2)I_2 + 2abA}$$

$$b) P(M) = 0_2 \Leftrightarrow M^2 + uM + vI_2 = 0_2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)I_2 + 2abA + uM + vI_2 = 0_2$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)I_2 + 2abA + u(aI_2 + bA) + vI_2 = 0_2$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)I_2 + 2abA + auI_2 + buA + vI_2 = 0_2$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2 + au + v)I_2 + (2ab + bu)A = 0_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + au + v = 0 \\ 2ab + bu = 0 \end{cases} \quad \text{car } I_2 \text{ et } A \neq 0$$

8. a) si  $\Delta > 0$ ,  $P(M) = 0_2$  admet 1 ou 2 solutions car c'est un polynôme de degré 2



9.  $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

10. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $M, N \in M_2(\mathbb{R})$

$$\varphi(\lambda M + N) = A(\lambda M + N)A = \lambda AMA + ANA = \lambda \varphi(M) + \varphi(N)$$

donc  $\varphi$  est linéaire

$M \in M_2(\mathbb{R})$  et  $AMA \in M_2(\mathbb{R})$  car  $A \in M_2(\mathbb{R})$

donc  $\varphi$  est un endomorphisme de  $M_2(\mathbb{R})$

11.  $\varphi \circ \varphi(M) = \varphi(AMA) = A^2 M A^2 = -I_2 M (-I_2) = \boxed{M}$

donc  $\varphi$  est bijectif et  $\varphi^{-1} = \varphi$

12a)  $\varphi(E_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{-E_4}$

$\varphi(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{E_3}$

$\varphi(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{E_2}$

$\varphi(E_4) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{-E_1}$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)  $B$  est symétrique donc diagonalisable

$B^2 = I_4 \Leftrightarrow B^2 - I_4 = 0$  donc  $p(x) = x^2 - 1$  est polynôme annulateur de  $B$  donc  $\{-1, 1\} \subset \text{Sp}(B)$

car,  $B$  est diagonalisable et  $B \neq I_4$  ou  $B \neq -I_4$

donc  $\dim(\text{Sp}(B)) \geq 2$  donc  $\boxed{\text{Sp}(B) = \{-1, 1\}}$

$$c) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in E_{-1}(B) \Leftrightarrow \begin{cases} a - d = 0 \\ b + c = 0 \\ c + b = 0 \\ d - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases}$$

donc  $E_{-1}(B) = \text{Vect}$

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)_{X_1, X_2}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in E_1(B) \Leftrightarrow \begin{cases} -a - d = 0 \\ -b + c = 0 \\ -c + b = 0 \\ -d - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -d \\ b = c \end{cases}$$

donc  $E_1(B) = \text{Vect}$

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)_{X_3, X_4}$$

$(X_1, X_2)$  et  $(X_3, X_4)$  sont libres car de 2 vecteurs non colinéaires. Elles sont chacune génératrice donc  $(X_1, X_2)$  est une base de  $E_{-1}(B)$  et  $(X_3, X_4)$  est une base de  $E_1(B)$ .

exercice 3:

$$1. X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([1; N])$$

2.  $(X \text{ in } l) == \text{False}$  signifie que  $X$  n'est pas dans la liste  $l$ .

$l.append(X)$  ajoute  $X$  à la fin de la liste donc si  $X$  n'est pas dans la liste, il est rajouté à la fin.



# Copie anonyme - n°anonymat : 871425

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 12

Session : 2024

Emplacement  
QR Code

Épreuve de : Mathématiques Appliquées emlyon

## Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

```
3. def simul_T(N, i):  
    L = []  
    k = 0  
    while np.len(L) <= i:  
        x = rd.randint(1, N+1)  
        ajout(L, x)  
        k = k + 1  
    return (k)
```

```
4. v = np.zeros(1000)  
for k in range(100):  
    v[k] = simul_T(3, 2)  
print(np.mean(v))
```

On obtient  $E(T_2)$  dans une urne de 3 boules

$$5. T_2(\omega) = [2; +\infty[$$

6. a)  $(T_2 = k) \cap (X_1 = 1)$  signifie qu'on a tiré la boule 1 lors des  $(k-1)^{\text{ème}}$  tirages et qu'on a obtenu une boule différente au  $k^{\text{ème}}$  tirage

On a donc

$$[(T_2 = k) \cap (X_1 = 1)] = \left( \bigcap_{j=1}^{k-1} X_j = 1 \cap (X_k \neq 1) \right)$$

$$b) P(T_2 = k \cap X_1 = 1) = P\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} X_j = 1 \cap (X_k \neq 1)\right)$$

$$= \prod_{j=1}^{k-1} P(X_j = 1) P(X_k \neq 1) = \left(\prod_{j=1}^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)\right) \frac{2}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \frac{2}{3}$$

indépendance mutuelle car il y a remise

$$c) P(T_2 = k) = P\left(\bigcup_{i=1}^3 X_i = i \cap T_2 = k\right) = \sum_{i=1}^3 P(X_1 = i \cap T_2 = k) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \frac{2}{3}$$

$\sum_{i=1}^3$  probas totales sur  $SCE(X_1 = i)_{i \in \{1,2,3\}}$  incompatibilité  $\text{var}(X_k = 1) = (X_k - 1)(X_k - 2)$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} (3 - 1 + 1) = \frac{2}{3^{k-1}}$$

7.  $T_2$  admet une espérance si  $\sum_{i=2}^{\infty} i P(T_2 = i)$  converge

absolument  $|i P(T_2 = i)| = 2i \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}$  on reconnaît une série géométrique de raison  $\frac{1}{3} \in ]-1, 1[$  donc  $E(T_2)$  existe et

$$E(T_2) = \sum_{i=2}^{\infty} i \frac{2}{3^{i-1}} = 2 \left( \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} - 1 \right) = 2 \left( \frac{1}{(1 - \frac{1}{3})^2} - 1 \right) = 2 \left( \frac{9-4}{4} \right) = \frac{5}{2}$$

$$8. Z_2(\Omega) = T_2(\Omega) - 1 = \mathbb{N}^*$$

$$P(Z_2 = k) = P(T_2 - 1 = k) = P(T_2 = k+1) = \frac{2}{3^k} = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \frac{2}{3} = \left(\frac{1 \cdot 2}{3}\right)^{k-1} \frac{2}{3}$$

$$\text{donc } Z_2 \sim \mathcal{G}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$E(T_2) = E(Z_2 + 1) = E(Z_2) + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

$$V(T_2) = V(Z_2 + 1) = V(Z_2) = \frac{1 - \frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \frac{3^2}{2^2} = \frac{3}{4}$$

$$3.a) Z_i(\Omega) = (T_i - T_{i-1})(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ car } T_i > T_{i-1}$$

$$P(Z_i = k) = P(T_i - T_{i-1} = k) = P\left(\bigcup_{j=i}^{\infty} T_i = j \cap T_{i-1} = \dots\right)$$

proba totales sur  $SCE(T_i = j)_{j \in \mathbb{N}^*}$



$$= \sum_{j=i-1}^{\infty} P(T_{i-1}=j \cap T_i=k+j) = \sum_{j=i-1}^{\infty} P(T_{i-1}=j) P(T_i=k+j)$$

$$= \sum_{j=i-1}^{\infty}$$

$$b) E(Z_i) = \frac{N}{N-i+1}$$

$$V(Z_i) = \frac{1 - \frac{N-i+1}{N}}{\left(\frac{N-i+1}{N}\right)^2} = \frac{i-1}{N} \frac{N^2}{(N-i+1)^2} = \frac{N(i-1)}{(N-i+1)^2}$$

si  $i=1$ ,  $E(Z_i)=1$  et  $V(Z_i)=0$  ce qui est vrai car on a forcément 1 boule unique au premier tirage

10. voir après 14 de

$$11.a) P(Z_2=l \cap Z_3=k) = P(Z_2=l) P(Z_3=k) \quad \text{indépendance}$$

$$= \left(1 - \frac{N-2+1}{N}\right)^{l-1} \frac{N-1}{N} \left(1 - \frac{N-3+1}{N}\right)^{k-1} \frac{N-2}{N}$$

$$= \left(\frac{1}{N}\right)^{l-1} \frac{N-1}{N} \left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} \frac{N-2}{N} = \frac{2^{l+k-1} (N-1)(N-2)}{\left(\frac{1}{N}\right)^{l+k}}$$

$$b) P(Z_2+Z_3=n) = P\left(\bigcup_{i=1}^n Z_2=i \cap Z_3=n-i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} P(Z_2=i \cap Z_3=n-i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-i-1} (N-1)(N-2) \left(\frac{1}{N}\right)^n = \frac{(N-1)(N-2)}{2} \left(\frac{1}{N}\right)^n 2^n \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

$$= \frac{(N-1)(N-2)}{2} \left(\frac{1}{N}\right)^n 2^n \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{(N-1)(N-2)}{2} \left(\frac{1}{N}\right)^n 2^n \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

$$= \frac{(N-1)(N-2)}{2} \left(\frac{1}{N}\right)^n \left(1 - \frac{2}{2^n}\right) = \frac{(N-1)(N-2)}{2} \left(\left(\frac{1}{N}\right)^n - \frac{2}{N^n}\right)$$

$$10, T_i = T_i - T_{i-1} + T_{i-1} - T_{i-2} \dots - T_1 = T_i - T_1 = \sum_{k=2}^i T_k - T_{k-1}$$

$$= \sum_{k=2}^i Z_k = \left[ \sum_{k=1}^i Z_k - 1 \right]$$

$$11c) T_3(\Omega) = [2; +\infty[$$

$$P(T_3 = k) = P\left(\sum_{h=2}^3 Z_h = k\right) = P(Z_2 + Z_3 = k) = \frac{(N-1)(N-2)}{2} \left(\frac{2}{N}\right)^2 - \frac{2}{N^2}$$

$$12. E(T_i) = E\left(\sum_{h=1}^i Z_h\right) = \sum_{h=1}^i E(Z_h) = \sum_{h=1}^i \frac{N}{N-h+1} = N \sum_{h=1}^i \frac{1}{h} = N \sum_{h=N-i+1}^N \frac{1}{h}$$

$h' = N - h + 1$

$$13. \text{cov}(T_i, T_j) = E(T_i T_j) - E(T_i) E(T_j) \stackrel{!}{=} E(T_i^2) - (E(T_i))^2 = V(T_i)$$

$\hat{=}$   $T_i$  et  $T_j$  suivent la même loi