

V6-00095
871425
Mat Appli



Code épreuve : 298

Nombre de pages : 12

Session : 2024

Épreuve de : Maths appliquées EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

exercice 1.

$$1.a) \frac{a}{x-x} + \frac{b}{x+x} = \frac{2a+bx+2b-bx}{1, 4-x^2} = \frac{1}{4-x^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+2b=1 \\ (a-b)x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a=1 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=b=\frac{1}{4}}$$

$$b) u_0 = \int_0^1 \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-x} + \frac{1}{x+x} \right) dx = \frac{1}{4} \left[-\ln(|x-x|) + \ln(|x+x|) \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} (\ln(2) - \ln(1) + \ln(3) - \ln(2)) = \boxed{\frac{1}{4} \ln(3)}$$

$$2) u_1 = \int_0^1 \frac{x}{4-x^2} dx = -\int_0^1 \frac{1}{2} \frac{-2x}{4-x^2} dx = -\frac{1}{2} \left[\ln(|4-x^2|) \right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2} (\ln(3) - \ln(4)) = \boxed{\frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{3}\right)}$$

$$3.a) 4u_m - u_{m+2} = 4 \int_0^1 \frac{x^m}{4-x^2} dx - \int_0^1 \frac{x^{m+2}}{4-x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^m (4-x^2)}{4-x^2} dx = \int_0^1 x^m dx = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{m+1}}$$

b) def suite (n):

if (-1) ⁺⁺ m = -1

u = np.log(3)/4

for k in range(2, n+1, 2):

u = 4*u - np.log(3)/4

else:

u = np.log(2/np.sqrt(3))

for k in range(3, n+1, 2):

u = 4*u - np.log(4/3)/2

return u

4a)

b) En en déduit que (u_n) converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3(n+1)} = 0 \text{ donc par enlèvement,}$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

c) $\frac{1}{4(n+1)} \sim \frac{1}{4n}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$ est une série de Riemannde paramètre $1 < 1$ donc elle diverge
Par comparaison de série de terme général positif, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4(n+1)}$ diverge et donc, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge5a) On peut conjecturer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ car la courbe semble tendre vers 1

$$b) u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^{n+1}}{(4-x^2)(n+1)} \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 x \frac{x^{n+1} dx}{(4-x^2)^2}$$

$\left(x \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ et } x \rightarrow (4-x^2) \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } [0; 1] \right)$

$$= \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$$

donc on peut faire une intégration par parties

$$c) \frac{1}{4(n+1)} < u_n < \frac{1}{3(n+1)} \Rightarrow \frac{1}{4(n+1)} < \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx < \frac{1}{3(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3(n+1)} - \frac{1}{3(n+1)} < \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx < \frac{1}{4(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 0 < \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx < \frac{1}{24}$$

$$\frac{1}{(n+1)} < u_n < \frac{4}{3(n+1)} \Rightarrow \frac{1}{(n+1)} < u_{n+2} + \frac{1}{n+1} < \frac{4}{3(n+1)}$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+2} < \left(\frac{4}{3(n+1)} - \frac{1}{n+1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

done $\lim \int_0^1$

exercice 2:

1. a) $-x e^{-x^2/2} > 0 \forall x > 0$ et $0 \geq 0 \forall x < 0$

donc $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

- $x \mapsto x e^{-x^2/2}$ est continue par produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} x e^{-x^2/2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-e^{-x^2/2} \right]_0^A$
 $= \lim_{A \rightarrow +\infty} (1 - e^{-A^2/2}) = 1$

donc f est bien une densité de probabilité

b) $E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = 1 + 0 = \boxed{1}$

c) X a une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)x dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx$ converge absolument

Soit $g(x) = x^2 e^{-x^2/2}$

L'ensemble de définition de g est symétrique par rapport à 0

$g(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2/2} = x^2 e^{-x^2/2} = g(x)$ donc g est paire

donc $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} E(X^2) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$
théorème de transfert

donc X admet une espérance qui vaut $\frac{\pi}{2}$

2) si $x < 0$, $F_X(x) = 0$

si $x \geq 0$, $F_X(x) = \int_0^x t e^{-t^2/2} dt = \left[-e^{-t^2/2} \right]_0^x = 1 - e^{-x^2/2}$

donc $F_X = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

3. a) $Z(\Omega) = \mathbb{R}^+$

si $x \geq 0$, $F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(X^2 \leq x) = P(-X \leq \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x})$

$= 1 - e^{-x/2}$

On reconnaît que $Z \in \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$

si $x < 0$, $F_Z(x) = \boxed{0}$

Copie anonyme - n°anonymat : 871425

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 12

Session : 2024

Emplacement
QR Code

Épreuve de :

Maths appliquées EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

b) def simulx():

z = rd.exponential(2)

X = z * 2

return X

4a) $X_n(\Omega) = \mathbb{R}_+$

si $x < 0$, $G_n(x) = 0$

si $x \geq 0$, $G_n(x) = P(X_n \leq x) = P\left(\frac{X}{\sqrt{n}} \leq x\right) = P(X \leq x\sqrt{n}) = 1 - e^{-\frac{(x\sqrt{n})^2}{2}}$

$= 1 - e^{-\frac{nx^2}{2}}$

done $G_n(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{nx^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - e^{-\frac{nx^2}{2}}) = 1 \text{ si } x \geq 0$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 \text{ si } x < 0$

donc (X_n) converge vers une variable X discrète de Bernoulli valant 1 si $x \geq 0$ et 0 sinon

c) X_n admet une espérance donc on peut utiliser le lemme de l'inégalité de Markov:

$0 \leq P(|X_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(|X_n|)}{\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow 0 \leq P(|X_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(|X_n|)}{\sqrt{2n} \varepsilon} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}} \frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow 0 \leq P(|X_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}} \frac{1}{\varepsilon} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

car $P(|X_n| \geq \varepsilon) = P(|X_n| > \varepsilon) + P(X_n = \varepsilon) = P(|X_n| > \varepsilon) + 0$

X_n est à densité

Donc par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n| \geq \varepsilon) = 0$

$$5a) M_n(\Omega) = \mathbb{R}_+$$

$$\text{si } x \geq 0: P(M_n > x) = P(\min(X_1, \dots, X_n) > x) = P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i > x)\right)$$

$$= \prod_{i=1}^n P(X_i > x) = \prod_{i=1}^n (1 - F_X(x)) = (1 - F_X(x))^n = (1 - 1 + e^{-\frac{x^2}{2}})^n = e^{-\frac{nx^2}{2}}$$

indépendance mutuelle

$$\text{si } x < 0: P(M_n > x) = 1$$

$$\text{donc } P(M_n \leq x) = 1 - P(M_n > x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{nx^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donc M_n et X_n suivent la même loi

b) def simulM(n):

$X = \text{np.array}([\text{simulX}() \text{ for } k \text{ in range}(n)])$

$M = \text{np.min}(X)$

return M

exercice 3:

$$1. f(x) = 1 + \int_0^x t f(x-t) dt = 1 + \int_x^0 (x-u) f(u) (-du)$$

$t \rightarrow x-t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0; x]$ donc on peut appliquer le changement de variables, $u = x-t$

$$= 1 + \int_0^x (x-u) f(u) du$$

2.a) Soit $g(t) = t f(x-t)$ g est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet une primitive G qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = 1 + \int_0^x g(t) dt = 1 + [G(t)]_0^x = 1 + G(x) - G(0)$$

donc f est $\mathcal{C}^1$ par somme de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = (1 + G(x) - G(0))' = G'(x) = g(x) = t f(x-t) = \int_0^x f(u) du$$

$$b) f''(x) = (f'(x))' = \left(\int_0^x f(u) du \right)' \stackrel{\text{F une primitive de } f}{=} \left([F(u)]_0^x \right)' = (F(x) - F(0))' \\ = F'(x) = \boxed{f(x)}$$

$$c) f''(x) - f(x) = 0$$

$$\text{On pose } x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } -1$$

$$\text{donc } \boxed{S = \{ t \rightarrow \lambda e^{-t} + \mu e^t \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}}$$

$$d) f(0) = 1 + \int_0^0 t f(-t) dt = \boxed{1}$$

$$f'(0) = \int_0^0 f(u) du = \boxed{0}$$

$$\begin{cases} f''(x) - f(x) = 0 \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

On reconnaît un problème de Cauchy donc il y a au maximum, une seule solution

$$\begin{cases} f(0) = \lambda + \mu = 1 \\ f'(0) = -\lambda + \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ \mu = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ donc } f(x) = \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{1}{2} e^x = \boxed{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

est l'unique solution du problème de Cauchy

$$3) \cancel{f(x) = 1 + \int_0^x (x-u) \frac{e^u + e^{-u}}{2} du = 1 + \int_0^x}$$

4) (*) n'a qu'une seule solution

donc $f(x) = \int_0^x t f(x-t) dt$ n'a qu'une seule solution qui est

$$f(x) - 1 = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2}$$

problème:

1) a) $a_0 = c_0 = 0$ et $b_0 = 1$

b) $P(X_1 = k) = P\left(\bigcup_{i=0}^2 (X_0 = i \cap X_1 = k)\right) = \sum_{i=0}^2 P(X_0 = i \cap X_1 = k) = \sum_{i=0}^2 P(X_0 = i) P_{X_0=i}(X_1 = k)$
 $= P_{X_0=1}(X_1 = k)$ car $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ est incompatible pour $i=0$ probas composées

$$P(X_1 = 0) = P_{X_0=1}(X_1 = 0) = \frac{1}{4} = a_1$$

$$P(X_1 = 1) = \frac{1}{2} = b_1$$

$$P(X_1 = 2) = \frac{1}{4} = c_1$$

c) $((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2))$ est un système complet d'événements car il ne peut y avoir que soit 0, soit 1 ou soit 2 boules blanches dans l'urne A.

d) $a_n + b_n + c_n = 1$ car c'est un système complet d'événements.

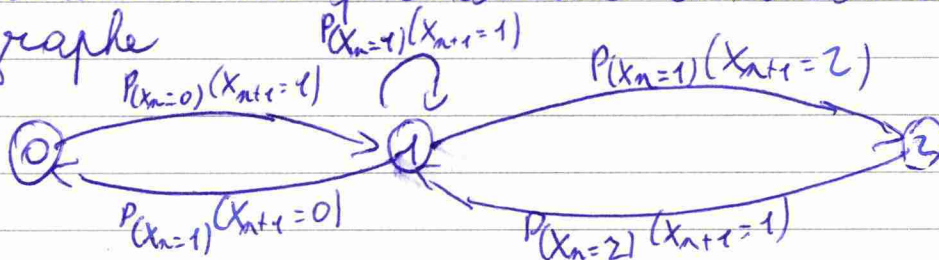
2. a) $P_{X_n=0}(X_{n+1}=0) = P_{X_n=2}(X_{n+1}=2) = P_{X_n=0}(X_{n+1}=2) = P_{X_n=2}(X_{n+1}=0) = 0$
car si on a 2 boules blanches dans l'urne A (ou inversement) au moment n , on ne peut pas en avoir 2 ou 0 au moment $n+1$ car on va forcément échanger avec une boule de B qui est obligatoirement noire (ou inversement) et par conséquent, $P_{X_n=0}(X_{n+1}=1) = P_{X_n=2}(X_{n+1}=1) = 1$

$P_{X_n=1}(X_{n+1}=0) = P_{X_n=1}(X_{n+1}=2) = \frac{1}{4}$ et $P_{X_n=1}(X_{n+1}=1) = \frac{1}{2}$
car si on a une boule blanche dans chaque urne, soit on pioche les 2 boules blanches ou les 2 boules noires et il y a toujours une boule blanche dans chaque urne. Soit on tire une blonde dans l'une et une noire dans l'autre et on se retrouve avec 2 boules de la même couleur dans chaque urne.

Copie anonyme - n°anonymat : 871425

Emplacement QR Code	Code épreuve : <u>298</u>	Nombre de pages :	Session : <u>2024</u>
	Épreuve de : <u>Maths appliquées EDHEC</u>		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

On retrouve les probabilités conditionnelles avec le graphe



b) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $a_{n+1} = P(X_{n+1}=0) = \underbrace{P((X_n=0 \cap X_{n+1}=0) \cup (X_n=1 \cap X_{n+1}=0) \cup (X_n=2 \cap X_{n+1}=0))}_{\text{probabilités totales}}$
 $= \underbrace{P(X_n=0 \cap X_{n+1}=0) + P(X_n=1 \cap X_{n+1}=0) + P(X_n=2 \cap X_{n+1}=0)}_{\text{incompatibilité}}$
 $= \underbrace{P(X_n=0)P_{X_n=0}(X_{n+1}=0) + P(X_n=1)P_{X_n=1}(X_{n+1}=0) + P(X_n=2)P_{X_n=2}(X_{n+1}=0)}_{\text{probas composées}}$
 $= \frac{1}{4}b_n + 0$

Pour le même principe, $b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n$
 $c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$

3) si $n=0$, $a_1 = \frac{1}{4}b_0 = \frac{1}{4}$
 $b_1 = a_0 + \frac{1}{2}b_0 + c_0 = \frac{1}{2}b_0 = \frac{1}{2}$
 $c_1 = \frac{1}{4}b_0 = \frac{1}{4}$
 donc ça correspond aux valeurs trouvées en 4 b.

$$4a) E(X_{n+1}) = 0P(X_{n+1}=0) + P(X_{n+1}=1) + 2P(X_{n+1}=2) \\ = b_{n+1} + 2c_{n+1}$$

$$b) E(X_{n+1}) = b_{n+1} + 2c_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n + 2\left(\frac{1}{4}b_n\right) = a_n + b_n + c_n = 1$$

q.t.d.

$$c) P_n: "b_n + 2c_n = 1"$$

Initialisation:

$$P_0: b_0 + 2c_0 = 1 + 0 = 1$$

P_0 est vraie

Hérédité:

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vraie et montrons que P_{n+1} est vraie.

$$P_{n+1}: b_{n+1} + 2c_{n+1} = 1$$

P_{n+1} est vraie q.t.d.

Conclusion:

P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence

$$5a) U_n V = 2a_n - b_n + 2c_n$$

$$U_{n+1} V = 2a_{n+1} - b_{n+1} + 2c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n - a_n - \frac{1}{2}b_n - c_n + \frac{1}{2}b_n \\ = -a_n + \frac{1}{2}b_n - c_n = -\frac{1}{2}(2a_n - b_n + 2c_n) = -\frac{1}{2}U_n V$$

donc $U_n V$ est une suite géométrique de raison $\boxed{-\frac{1}{2}}$

$$b) 2a_n - b_n + 2c_n = U_n V = U_0 V \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$6) 2a_n - b_n + 2c_n \stackrel{SCE}{=} 2 - 3b_n = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \boxed{b_n = \frac{1}{3} \left(2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}$$

$$a_n = c_n = \frac{1}{12} \left(2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right)$$

$$P(X_n=1) = b_n \quad X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

$$P(X_n=0) = P(X_n=2) = a_n = c_n$$

$$7) \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \quad b_n \quad c_n) = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n \right)$$

$$= \left(\frac{1}{6} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{6} \right)$$

donc X_n converge en loi vers une variable X telle que $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$
 $P(X=0) = P(X=2) = \frac{1}{6}$
 $P(X=1) = \frac{2}{3}$

$$8) a) M^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{5}{8} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$2M^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M^2 + M$$

b) $P(X) = 2X^3 - X^2 - X = X(2X^2 - X - 1) = X(X-1)\left(X+\frac{1}{2}\right)$
 est polynôme annulateur de M donc
 $\left\{-\frac{1}{2}; 0; 1\right\} \subset \text{Sp}(M)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ zy \end{pmatrix} \in E_{-\frac{1}{2}}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 0 \\ \frac{1}{4}x + y + \frac{1}{4}zy = 0 \\ y + \frac{1}{2}zy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 4y + zy = 0 \\ 2y + zy = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2y + zy = 0 \\ 2y + zy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ zy = -2y \end{cases} \text{ donc } E_{-\frac{1}{2}}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)_{x_1}$$

de la même façon $E_0(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)_{x_2}$ et $E_1(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)_{x_3}$

Aucun espace propre n'est vide donc $\mathcal{P}_M(M) = \{-\frac{1}{2}; 0; 1\}$
 (X_1) , (X_2) et (X_3) sont libres car d'un seul vecteur,
 donc ce sont des bases de sous-espaces propres.

c) Par constitution de bases de sous-espaces propres associées à des valeurs propres différentes, (X_1, X_2, X_3) est libre.

$$\text{card}(X_1, X_2, X_3) = 3 = \dim(M_{3,1}(\mathbb{R}))$$

donc (X_1, X_2, X_3) est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$

donc M est diagonalisable avec $M = PDP^{-1}$

avec $P = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ inversible.

d) $MP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $PD = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$MP = PD \Leftrightarrow MP P^{-1} = M = P D P^{-1}$ donc on retrouve que M est diagonalisable.

e) $U_{n+1} = (a_{n+1} \ b_{n+1} \ c_{n+1}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}b_n & a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n & \frac{1}{4}b_n \end{pmatrix}$
 $= (a_n \ b_n \ c_n) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = U_n M$

f) "Pn: $U_n = U_0 M^n$ "

Initialisation:

$P_0: U_0 = U_0 I_3 = U_0 M^0$ donc P_0 est vraie

Hérédité:

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vraie et montrons que P_{n+1} est vraie.

$P_{n+1}: U_{n+1} = U_n M \stackrel{\text{hypothèse de récurrence}}{=} U_0 M^n M = U_0 M^{n+1}$ donc P_{n+1} est vraie

Conclusion:

P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

g) On calcule $M^n = (P D P^{-1})^n \stackrel{\text{par récurrence}}{=} P D^n P^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} (-\frac{1}{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis on fait $U_0 A^n$ et on trouve U_n .