

Copie anonyme - n°anonymat : 353513

E6-00043
353513
Mat Appl



Code épreuve : 298

Nombre de pages : 23

Session : 2024

Épreuve de :

Maths Appli

Eclhec

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

1) a) $\forall x \in (0,1), (a,b) \in \mathbb{R}^2,$

On cherche a,b tels que

$$\frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x}$$

$$\frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x} = \frac{a(2+x) + b(2-x)}{4-x^2} = \frac{x(a-b) + 2(a+b)}{4-x^2}$$

$$\text{On a donc } \begin{cases} a-b=0 \\ 2(a+b)=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=b \\ 2a=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{a=b=\frac{1}{2}}$$

b) M_0 = $\int_0^1 \frac{1}{4-x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{2(2-x)} + \frac{1}{2(2+x)} dx$ (d'après 1.a)

$$= \left[-\frac{1}{2} \ln(4-2x) + \frac{1}{2} \ln(4+2x) \right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(6) - \left(-\frac{1}{2} \ln(4) + \frac{1}{2} \ln(4) \right)$$

$\ln(6) = \ln(2 \times 3)$
 $= \ln 2 + \ln 3$

$$= -\frac{1}{2} \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(3)$$

$$= \frac{1}{2} \ln(3) \quad \times$$

$$2) \underline{u_1} = \int_0^1 \frac{x}{4-x^2} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \ln(4-x^2) \right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(3) + \frac{1}{2} \ln(4)$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(3) + \frac{2}{2} \ln(2)$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(3) + \ln(2) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\right) = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

3) a) Soit $r \in \mathbb{R}$,

$$\text{On pose } (Er) : -r^2 + 4$$

$$-r^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -(r^2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow -(r-2)(r+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow r = -2 \text{ ou } r = 2$$

$$u_n = \frac{1}{4} \left(\ln\left(\frac{2}{3}\right) \right) (-2)^n + \frac{1}{4} \ln(2) (2)^n$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda(-2)^n + \mu 2^n$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

(*)

b) def $\text{solve}(n)$:

if $(-1)^n == 1$:

$$u = mp \cdot \log(3) / 4$$

for k in range $(2, n+1, 2)$:

$$u = 4 * u -$$

else:

$$u = mp \cdot \log(2 / mp \cdot \log(3))$$

for k in range $(3, n+1, 2)$:

$$u = 4 * u -$$

return

(*) Or, $u_0 = \frac{1}{4} \ln(3)$ et $u_1 = -\frac{1}{2} \ln(3) + \ln(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = \frac{1}{4} \ln(3) \\ -2\lambda + 2\mu = -\frac{1}{2} \ln(3) + \ln(2) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu = \frac{1}{4} \ln(2) \\ \lambda = \frac{1}{4} \left(\ln\left(\frac{2}{3}\right) \right) \end{cases}$$

$\frac{2}{\sqrt{3}}$

$$4) a) \forall x \in [0,1], \quad 4 \geq 4-x^2 \geq 3 \quad \} 4-x^2 \neq 0$$

$$\text{donc } \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4-x^2} \leq \frac{1}{3}$$

croissance de l'intégrale

$$\frac{x^n}{4} \leq \frac{x^n}{4-x^2} \leq \frac{x^n}{3}$$

} $x \times x^n$

$$\text{donc } \int_0^1 \frac{x^n}{4} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx = I_n \leq \int_0^1 \frac{x^n}{3} dx$$

$$\text{i.e. } \left[\frac{x^{n+1}}{4(n+1)} \right]_0^1 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{3(n+1)} \right]_0^1$$

$$\text{donc on a bien } \frac{1}{4(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{3(n+1)}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3(n+1)} = 0$$

Donc d'après le Théorème des Gendarmes et 4-a),

(I_n) converge et $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$

$$c) \text{ d'après 4-a), } \sum_{n \geq 0} \frac{1}{4(n+1)} \quad \sum_{n \geq 0} I_n \geq \sum_{n \geq 0} \frac{1}{4(n+1)}$$

Or, $I_n \in \mathbb{R}^+$, $I_n \geq 0$ et $\frac{1}{4(n+1)}$ aussi.

De plus, $\frac{1}{4(n+1)} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (Riemann)

Donc comme $\frac{1}{n} \geq 0$, $\frac{1}{4(n+1)} \geq 0$ et $I_n \geq 0$, d'après le Théorème

de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 0} I_n$ diverge.

5) a)

On peut dire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{3n}$

car le sympte simple $3n \lim = \frac{\lim}{\frac{1}{3n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{3n}$

b). $\lim = \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx$

on pose $u(x) = \frac{1}{4-x^2}$, $u'(x) = \frac{-(-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{2x}{(4-x^2)^2}$

$v'(x) = x^n$, $v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ donc on peut intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned} \lim &= \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(4-x^2)} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x \times x^{n+1}}{(4-x^2)^2 \times (n+1)} dx \\ &\quad \text{terme en 0} = 0 \\ &= \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx \end{aligned}$$

c) De même que pour 4-a, on a $\forall x \in [0,1]$,

$$(4-0)^2 = 16 \geq (4-x^2)^2 \geq 9 = (4-1)^2$$

$$\downarrow (4-x^2)^2 \neq 0$$

$$\text{donc } \frac{x^{n+2}}{16} \leq \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} \leq \frac{x^{n+2}}{9}$$

Par crasse de l'intégrale

$$\text{donc } \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{16} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{9} dx$$

≥ 0 par positivité de l'intégrale

$$\text{et } \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{9} dx = \frac{1^{n+3}}{9(n+3)} = \frac{1}{9(n+3)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

~~Donc d'après Théorème des Gendres, $\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx \rightarrow 0$~~ 4/4

Copie anonyme - n°anonymat : 353513

Emplacement QR Code	Code épreuve : 298	Nombre de pages :	Session : 2014
	Épreuve de : Maths Appl. échec		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Donc d'après le Théorème des Gendarmes, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx = 0$

b) Don $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3(n+1)} \sim \frac{1}{3n}$
ce qui confirme la s.a.))

Exercice 2 :

1) a) * f est définie sur $\mathbb{R}$.

* $\forall x \geq 0, x \mapsto xe^{-x^2/2} \geq 0$ et $\forall x < 0, x \geq 0$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.

* $x \mapsto xe^{-x^2/2}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+$ par opérations sur les fonctions usuelles

et $x \mapsto 0$ est $\mathcal{C}^0$ en tant que fonction nulle.

Donc f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ (surtout éventuellement en 0)

* Soit $n > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^n f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^n xe^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_0^n xe^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

$$= - \left[e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^n = \underbrace{e^{-\frac{n^2}{2}}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} - (-1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

Donc f peut être considérée comme une densité.

b) si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Alors $V(X) = 1$ et $E(X) = 0$

Or, d'après Koëning - Huyghens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
 $\Rightarrow E(X^2) = V(X) + E(X)^2$
 $= 1 + 0^2$
 $= 1$

Donc si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $E(X^2) = 1$.

c) on a $g(x) = x \times f(x)$

$= x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$

Or, $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $g(-x) = (-x)^2 e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = g(x)$

donc g est paire.

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ (sans risque d'absolue convergence).

Or, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$
 $= \sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{2} E(Y^2), Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$
 $= \frac{1}{2} \times 1$ d'après 1-b)

Donc $E(X) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

car $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$
 car g est paire.

2) $\forall x < 0$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^0 f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt = 0$$

$\forall x > 0$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^0 \underbrace{f(t)}_{=0} dt + \int_0^x f(t) dt$$

$$= \int_0^x t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= - \left[e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^x$$

$$= 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Donc $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

3) a) $\forall x < 0$,

$$F_Z(x) = P(Z \leq x)$$

$$= P(X^2 \leq x) \quad , \quad \text{car } X(\Omega) = \mathbb{R}_+ \text{ donc } X^2(\Omega) = \mathbb{R}_+$$

$$= 0$$

$\forall x > 0$,

$$F_Z(x) = P(Z \leq x)$$

$$= P(X^2 \leq x)$$

$$= P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x})$$

$$= F_X(\sqrt{x}) - \underbrace{F_X(-\sqrt{x})}_{=0 \text{ car } -\sqrt{x} \leq 0}$$

$$= F_X(\sqrt{x}) = 1 - e^{-\frac{(\sqrt{x})^2}{2}}$$

$$= 1 - e^{-\frac{x}{2}}$$

$$= 1 - e^{-\frac{x}{2}}$$

Donc $F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

donc $Z \sim \mathcal{E}(\frac{1}{2})$

b) def simul(X) : # les bibliothèques sont déjà importées d'avant l'exercice
 $Z = \text{rd.exp}(-1/2)$
 return $X = \text{mp.sq}rt(Z)$

4) 2)

$$X(\omega) = \mathbb{R}_+ \text{ donc } \cancel{Y_m(\omega) = \left\{ \frac{x}{\sqrt{m}} \right\}_{m \in \mathbb{N}^*}}$$

$$\text{Soit } m \in \mathbb{N}^*, Y_m = \frac{X}{\sqrt{m}} \text{ donc } Y_m(\omega) = \mathbb{R}_+ \cdot \left(= \left\{ \frac{x}{\sqrt{m}} \right\}_{m \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}_+} \right)$$

$$\text{Or, } \frac{x}{\sqrt{m}} \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \text{ car } \sqrt{m} > 0 \text{ donc } \frac{1}{\sqrt{m}} > 0.$$

$$\text{Donc comme } Y_m(\omega) = \mathbb{R}_+, \forall x \leq 0, G_m(x) = 0.$$

et $\forall x \geq 0$,

$$G_m(x) = \mathbb{P}(Y_m \leq x)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{X}{\sqrt{m}} \leq x\right)$$

$$= \mathbb{P}(X \leq x\sqrt{m})$$

$$= F_X(x\sqrt{m}) \quad \text{d'après 4.1))}$$

$$= 1 - e^{-\frac{(x\sqrt{m})^2}{2}}$$

$$= 1 - e^{-\frac{x^2 m}{2}}$$

$$\text{Donc } \forall m \in \mathbb{N}^*, \text{ on a bien } G_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{mx^2}{2}} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

b)

$$\text{D'après 4.2), pour } x \leq 0, \lim_{m \rightarrow +\infty} G_m(x) = 0$$

$$\text{pour } x \geq 0, \lim_{m \rightarrow +\infty} 1 - e^{-\frac{mx^2}{2}} = 1.$$

$$\xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \text{ car } \frac{x^2}{2} > 0$$

$$\text{Donc } \lim_{m \rightarrow +\infty} G_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \text{ donc } (Y_m)_m \text{ converge en loi.}$$

8/24

Copie anonyme - n°anonymat : 353513

Emplacement QR Code	Code épreuve : <u>EG8</u>	Nombre de pages :	Session : <u>2024</u>
	Épreuve de : <u>Maths Appli Edhec</u>		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

c) ^{Set $m \in \mathbb{N}^*$} On a $E(Y_m) = E\left(\frac{X}{\sqrt{m}}\right) = \frac{1}{\sqrt{m}} E(X)$

$$= \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{m}}$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{2m}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Or, d'après le Théorème Central Limité, $\forall \varepsilon > 0$, comme $E(Y_m)$ existe, on a $\lim_{m \rightarrow \infty} P(|Y_m - E(Y_m)| > \varepsilon) = 0$

$$\text{Or, } \lim_{m \rightarrow \infty} |Y_m - E(Y_m)|$$
$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \left| Y_m - \underbrace{\sqrt{\frac{\pi}{2m}}}_{\rightarrow 0} \right| = |Y_m|$$

Donc on a bien $\lim_{m \rightarrow \infty} P(|Y_m| > \varepsilon) = 0$ d'après le

Théorème Central Limité.

5) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
 $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$[Y_n > x] = \bigcap_{k=1}^n [X_k > x]$$

Donc $P(Y_n > x) = P\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k > x]\right)$ par indépendance d'après l'énoncé.

$$= \prod_{k=1}^n P(X_k > x)$$

$$= \prod_{k=1}^n (1 - P(X_k \leq x))$$

car les $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ suivent toutes la loi de X .

$$= \prod_{k=1}^n P(X > x)$$

$$= \prod_{k=1}^n (1 - P(X \leq x))$$

$$= \prod_{k=1}^n (1 - (1 - e^{-\frac{x^2}{2}}))$$

d'après la q. 2 qui donne $F_X(x)$

$$= \prod_{k=1}^n (1 - F_X(x))$$

$$= \begin{cases} \prod_{k=1}^n (1 - (1 - e^{-\frac{x^2}{2}})) & \text{si } x \geq 0 \\ \prod_{k=1}^n (1 - 0) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \prod_{k=1}^m e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ \prod_{k=1}^m 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (e^{-\frac{x^2}{2}})^m & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-\frac{mx^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

~~Or, $\lim_{m \rightarrow \infty} (e^{-\frac{x^2}{2}})^m = 0$~~
~~Donc~~

Donc $P(r_m \leq x) = 1 - P(r_m > x)$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-\frac{mx^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 1 - 1 = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Donc r_m suit la même loi que Y_m de la 9.4

b) `def simulst(m):`

`X = np.array([simul(X) for k in range(m)])`

`fl = min(X)`

`return fl.`

Exercice 3:

Changement de variable affine sur un fermé.

1) on pose $u = x - t$ donc comme u est e^u sur $\mathbb{R}$, $du = -dt$
 en $t = 0$, $u = x$
 $t = x$, $u = 0$

donc par changement de variable affine,

$$\begin{aligned} \underline{f(x)} &= 1 + \int_0^x t f(x-t) dt = \int_x^0 (x-u) f(u) (-du) \\ &= -\int_x^0 (x-u) f(u) du \\ &= \underline{\int_0^x (x-u) f(u) du} \end{aligned}$$

2) a) $f(x) = 1 + \int_0^x (x-u) f(u) du$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, \forall u \in [0, x], f(u)$ est $\mathcal{C}^0$ donc $f(x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

De plus, on a donc

Par linéarité de l'intégrale, $f(x) = 1 + \underbrace{\int_0^x x f(u) du}_{(*)} - \underbrace{\int_0^x u f(u) du}_{(\#)}$

Or, $\int_0^x x f(u) du = x \int_0^x f(u) du$

et $\left(x \int_0^x f(u) du \right)' = \int_0^x f(u) du + x \left(f(x) + 0 \right) = \int_0^x f(u) du + x f(x)$

et $\left(\int_0^x u f(u) du \right)' = x f(x) - 0$

Donc $f'(x) = \underbrace{\int_0^x f(u) du + x f(x)}_{(*)} - \underbrace{(x f(x) - 0)}_{(\#)} = \int_0^x f(u) du$

b) Or, comme f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^x f(u) du$ alors f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Or, en posant F primitive de f alors

~~$f''(x) = x' F'(x) - 0 F'(0)$~~

Copie anonyme - n°anonymat : 353513

Emplacement QR Code	Code épreuve : <u>298</u>	Nombre de pages :	Session : <u>2024</u>
	Épreuve de : <u>Maths Appli Edhec</u>		
	Consignes - Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer - Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir - Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) - Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) - Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre		

$$\underline{f''(x) = \left(\int_0^x f(u) du \right)'}$$

$$= F'(x) - 0 = \underline{f(x)}$$

c) ~~les solutions de $f''(x) = f(x)$ sont~~

On pose $(E) : f''(x) - f(x) = 0$

Soit $r \in \mathbb{R}$, $r^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (r+1)(r-1) = 0$
 $\Leftrightarrow r = -1$ ou $r = 1$.

Donc les solutions sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-t} + \mu e^t$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

d) $f(0) = 1 + \int_0^0 \text{---} dt = 1$ (d'après l'énoncé)

$f'(0) = \int_0^0 f(u) du = 0$

Donc on a le système suivant d'après 2-c) ; avec $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = -\lambda e^{-t} + \mu e^t$
 et $f'(0) = 0$ et $f(0) = 1$

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ -\lambda + \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\mu = 1 \\ \lambda = \mu \end{cases} \quad \mu \in L_1 + L_2$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \mu = \frac{1}{2}$$

Donc $\underline{f(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t = \frac{e^{-t} + e^t}{2}}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

~~Et il y a aussi plus~~, Et c'est l'unique solution car vérifie des conditions initiales.

3) ~~Prova~~ Mostre que $f(x) = 1 + \int_0^x t f(x-t) dt$

$$1 + \int_0^x t f(x-t) dt = 1 + \int_0^x t x \frac{e^{x-t} + e^{-(x-t)}}{2} dt \quad \begin{array}{l} \text{lineare fkt} \\ \text{L'Hôpital} \end{array}$$

On pose $u = t$, $u' = 1$ et $v \in \mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
 $v' = e^{x-t}$ $v = -e^{x-t}$

Dec 14

$$= 1 + \frac{1}{2} \left(\left[-te^{x-t} \right]_0^x + \int_0^x e^{x-t} dt \right) + \frac{1}{2} \left(\left[te^{x-t} \right]_0^x - \int_0^x e^{t-x} dt \right)$$

~~$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \left[-e^{x-t} \right]_0^x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$~~

$$\cancel{= A} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \left[-e^{x-t} \right]_0^x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \left[e^{t-x} \right]_0^x$$

$$= 1 + \frac{-1 \times (e^x)}{2} - \frac{1}{2}(e^{-x})$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = f(x)$$

Par la factorisation est bien solution.

4)

on note $\tilde{f}(x) = \int_0^x t f(x-t) dt$

on comme la dérivée de 1 = 0,

on a $\tilde{f}'(x) = f'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, f la fonction du début de l'exercice.

et $\tilde{f}(0) = f(0) - 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = f(x) - 1$

donc l'unique solution est $t \mapsto \lambda e^{-t} + \mu e^t - 1, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

Problème:

1) a) A début, il y a une boule blanche dans A donc
 $a_0 = P(X_0 = 0) = 0$, $b_0 = P(X_0 = 1) = 1$, $c_0 = P(X_0 = 2) = 0$

~~b) Avec le système complet d'événements $\{X_0 = k\}_{k \in \{1, 2\}}$ et la formule des probabilités totales (FPT), on a,~~
 ~~$X_1(\Omega) = \{0, 2\}$~~

~~$P(X_1 = k) =$~~

b) On note $\forall n \in \mathbb{N}$, A_n : "on pioche une boule blanche dans A lors de la $n^{\text{ième}}$ épreuve".

$\bar{A}_n$: "_____ boule noire dans A"

$X_1(\Omega) = \{0, 2\}$

~~$[X_1 = 0]$ signifie que l'on a tiré la boule blanche dans A~~

~~donc $P(X_1 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ il y a 1 noire et 1 blanche et on a pioché la noire dans B.~~

~~$P(X_1 = 2) =$~~

$[X_1 = 0] = A_1 \cap \bar{B}_1$; donc $P(X_1 = 0) = P(A_1 \cap \bar{B}_1) = P(A_1)P(\bar{B}_1)$ (indépendance)
 $= \frac{1}{4}$

$$[X_1 = 2] = [\bar{A}_1 \cap B_1]$$

$$\begin{aligned} P(X_1 = 2) &= P(\bar{A}_1 \cap B_1) = P(\bar{A}_1)P(B_1) \quad (\text{independants}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Et } P(X_1 = 1) &= 1 - (P(X_1 = 0) + P(X_1 = 2)) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } a_1 = c_1 = \frac{1}{4} \text{ et } b_1 = \frac{1}{2}$$

c) Comme à chaque expérience, on pioche une boule dans chaque urne pour la mettre dans l'autre, il y a toujours 2 boules dans chaque urne. Et comme il n'y a que 2 boules blanches au total, $X_n \in \{0, 1, 2\} \forall n \in \mathbb{N}$.

Donc $((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2))$ est un système complet d'événements.

d) Donc $a_n + b_n + c_n = 1$ par définition d'un système complet

$$\begin{aligned} \text{e) } \forall (i, j) \in \{0, 1, 2\}^2, \\ P_{(X_n = i)}(X_{n+1} = j) &= \frac{P((X_n = i) \cap (X_{n+1} = j))}{P(X_n = i)} \quad (\text{formule de Bayes}) \end{aligned}$$

Si $i = j$, $P_{(X_n = i)}(X_{n+1} = j)$ est la probabilité que l'autre urne la même

$$\begin{aligned} &\text{boule dans A et dans B} \\ \text{donc } P_{(X_n = i)}(X_{n+1} = j) &= P((\bar{A}_{n+1} \cap \bar{B}_{n+1}) \cup (A_{n+1} \cap B_{n+1})) \\ &= P(\bar{A}_{n+1})P(\bar{B}_{n+1}) + P(A_{n+1})P(B_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Or, si $i = j$, cela ne peut être que $i = j = 1$ car on change les boules à chaque étape donc $P_{(X_n = 0)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}$

Si $[X_n = 0]$, alors $[X_{n+1} = 1]$ car on pioche forcément une boule dans A et on la met dans B.

même chose pour si $[X_n = 2]$ alors $[X_{n+1} = 1]$ mais dans l'autre sens.

16/24

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths Appli Echec

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

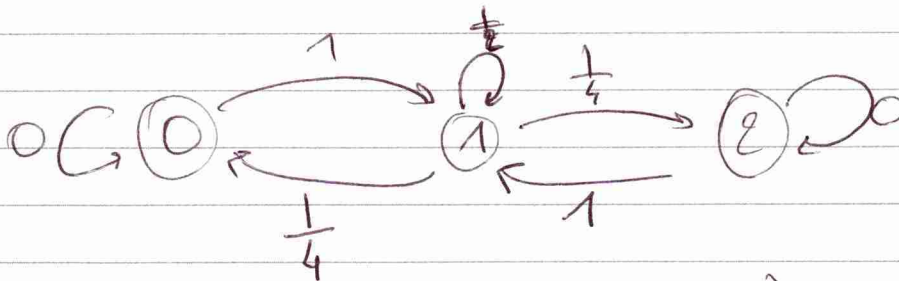
$$\text{Donc } P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1) = P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1) = 1.$$

$$P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0) = P(A_n \cap \bar{B}_n) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad (\text{par indépendance})$$

$$P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2) = P(\bar{A}_n \cap B_n) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad (\text{par indépendance})$$

$$\text{et } P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0) = P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=2) = 0 \quad \text{car on peut ne se balader que dans chaque urne.}$$

On a donc par définition le graphe suivant :



b) On a donc $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \sum_{j=1}^3 a_{1j} = 1$
 $\rightarrow \sum_{j=1}^3 a_{2j} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$
 $\rightarrow \sum_{j=1}^3 a_{3j} = 1$

$$\sum_{j=1}^3 a_{1j} = 0 + 1 + 0 = 1$$

$$\sum_{j=1}^3 a_{2j} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\sum_{j=1}^3 a_{3j} = 1$$

c) D'après la FPT avec le système complet d'événement (a_n, b_n, c_n) ,

$$a_{n+1} = P(X_{n+1}=0) = \sum_{k=0}^3 a_k P_{a_k}(\cdot)$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(X_{n+1}=0) &= a_n \times P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=0) + b_n P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=0) \\ &\quad + c_n \times P_{[X_n=2]}(X_{n+1}=0) \end{aligned}$$

$$= 0 \times a_n + \frac{1}{4} b_n + 0 \times c_n \quad \begin{array}{l} \text{(d'après le graphe)} \\ \text{ou la matrice} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{De même, } b_{n+1} &= a_n P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1) + b_n P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) + c_n P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1) \\ &= a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= a_n P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=2) + b_n P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2) + c_n P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2) \\ &= 0 \times a_n + \frac{1}{4} b_n + 0 \times c_n \end{aligned}$$

$$\text{Donc } a_{n+1} = \frac{1}{4} b_n, \quad c_{n+1} = \frac{1}{4} b_n, \quad b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n$$

$$\begin{aligned} 3) \quad a_1 &= \frac{1}{4} b_0 = \frac{1}{4} & c_1 &= \frac{1}{4} b_0 = \frac{1}{4} & \text{et } b_1 &= a_0 + \frac{1}{2} b_0 + c_0 \\ & & & & &= 0 + \frac{1}{2} + 0 \\ & & \text{car } b_0 &= 1 \text{ d'après q.1} & &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc en comparant avec 1-b), les formules restent valides pour $n=0$.

4) a)

$$E(X_{n+1}) = 0 \cdot 2a_{n+1} + b_{n+1} + 2c_{n+1} \quad (\text{par formule})$$

$$= b_{n+1} + 2c_{n+1}$$

$$\sum_{k=-1}^2 k P(X_{n+1} = k)$$

4) a) $E(X_{n+1}) = \sum_{k=-1}^2 k P(X_{n+1} = k)$

$$= b_{n+1} + 2c_{n+1}$$

b) $E(X_{n+1}) = b_{n+1} + 2c_{n+1}$

$$= 2a + \frac{1}{2}b_n + c_n + 2 \times \frac{1}{4}b_n$$

$$= 2a + b_n + c_n = 1 \quad \text{car c'est un système complet d'événements d'après 1-d))}$$

c) De même, on aurait $E(X_n) = 1$

donc $b_n + 2c_n = 1$.

5) a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$M_n V = (2a_n \ b_n \ c_n) \underbrace{\begin{pmatrix} 2a_n - b_n + 2c_n \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}}$$

Donc $U_n V = 2a_n - b_n + 2c_n \in \mathbb{R}$

$$M_0 V = (2a_0 \ b_0 \ c_0) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (2a_0 - b_0 + 2c_0)$$

$$M_0 V = -1$$

U_1

|

pas suite.

8)

Copie anonyme - n°anonymat : 353513

Emplacement QR Code	Code épreuve : <u>E98</u>	Nombre de pages :	Session : <u>E024</u>
	Épreuve de : <u>Maths Appli Edhec</u>		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Pour $-\frac{1}{2}$:

$$X \in E_{-\frac{1}{2}}(\Pi) \Rightarrow \left(\Pi + \frac{1}{2}\right)X = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x + y = 0 \\ \frac{1}{4}x + y + \frac{1}{4}z = 0 \\ y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

$$L_2 - L_1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x + y = 0 \\ y + \frac{1}{2}z = 0 \\ y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = -2y \\ x = -2y \end{cases} \Rightarrow X = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

Or, $\text{card} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = 0$ car 1 vecteur

donc $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ base de $E_{-\frac{1}{2}}(\Pi)$.

Pour 0 :

$$X \in E_0(\Pi) \Rightarrow \Pi X = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases} \Rightarrow E_0(\Pi) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$\neq 0_{E_0(\Pi)}$
donc c'est une base de $E_0(\Pi)$

Pour 1:

$$X \in E_1(M) \Leftrightarrow (M - I)X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} l_2 \leftarrow 4l_2 + l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 + l_1 \end{matrix} \begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases} \Leftrightarrow X = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \neq 0 \in \mathcal{L}_{3,1}(\mathbb{R})$$

donc c'est un base de $E_1(M)$.

c) Peut inversible en tant que matrice de changement de base.

d)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}P$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = PD$$

On a donc $\Pi P = P D$ $\rightarrow$ ~~(*)~~ P^{-1} à droite

soit $M = P D P^{-1}$

(*) e) Donc Π est diagonalisable. par définition car semblable à D qui est diagonale.

f) $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n: M_n = M_0 \Pi^n$

Initialisation:

On a part $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
 Autre part,
 $M_0 \Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = M_1$

Donc H_1 est vérifiée.

Hérédité:

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que H_n est vérifiée.

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= M_n \Pi && \text{(d'après 8. e)} \\ &= U_0 \Pi^n \times \Pi && \text{(d'après } H_n) \\ &= U_0 \Pi^{n+1} \end{aligned}$$

Donc H_{n+1} est vérifiée.

Conclusion:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $M_n = U_0 \Pi^n$.

(*) e) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \underline{U_n \Pi} &= \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1} \end{aligned}$$

d'après 9. e-c))

g) Pour obtenir la loi de X_n , il faut changer le début de l'expérience (des U_0).
 Avec $U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

