

ES-00043
353513
Mat2 Appli



Code épreuve : 287

Nombre de pages : 16

Session : 2024

Épreuve de : Maths Appliquées II

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I $\text{imp} \text{ mpy} \text{ as } \text{mp} \text{ et } \text{mpy} \cdot \text{linalg} \text{ as } \text{al} \text{ sont importés}.$

- 1) Si A est symétrique, alors elle est diagonalisable d'après le Théorème du Spectre donc $\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible tel que $A = P^{-1}DP$
Avec D la ^{diagonale} matrice contenant que les valeurs propres de A sur la diagonale.

$$\text{Donc } A = PDP^{-1} \Leftrightarrow D = P^{-1}AP$$

- 2) A est symétrique donc A est diagonalisable.
De plus, $\text{rg}(A) = 2 < 3$ car 2 lignes non nulles proportionnelles.
↓ Donc $\dim \text{E}_0(A) = 3 - 2 = 1$.
Après étude ultérieure, $X(-3X^2 + X + 2)$ est annulateur de A .
$$= -X(X+1)\left(X+\frac{2}{3}\right)$$

- 3) $\text{def } \text{energie}(A):$
 $X = \text{al.eigenvals}(A)$
 $\text{return } Y = \text{mp.sum}(\text{mp.abs}(X))$

$$4) \text{ a) } \text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \left(\sum_{j=1}^{\tilde{m}} a_{ij} b_{ji} \right) = \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \left(\sum_{i=1}^{\tilde{m}} a_{ij} b_{ji} \right)$$

car on ne commute pas les matrices mais l'ordre des coeffs.

$$\text{Donc } \text{Tr}(AB) = \sum_{1 \leq i, j \leq \tilde{m}} a_{ij} b_{ji}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad \underline{\text{tr}(AB)} &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} b_{ji} \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq m} a_{ij} b_{ji} \quad (\text{d'après 4.2}) \\
 &= \sum_{1 \leq i, j \leq m} b_{ji} a_{ij} \\
 &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} \right) \\
 &= \underline{\text{tr}(BA)}
 \end{aligned}$$

~~$$* \quad \text{tr}({}^tAA) = \sum$$~~

~~Les coefficients sur la diagonale ne sont pas forcément égaux à 1, donc~~

Comme $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, $\text{tr}({}^tAA) = \text{tr}(A{}^tA)$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } \text{tr}({}^tAA) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} a_{ji} \right) \quad \downarrow \text{ avec la transposée, } a_{ij} \text{ devient } a_{ji} \\
 &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} a_{ij} \right) \quad \text{et on inverse les sommes.}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \text{tr}({}^tAA) = \sum_{1 \leq i, j \leq m} a_{ji}^2$$

Donc si $\text{tr}({}^tAA) = 0$, alors $a_{ij} = -a_{ji}$ donc A est antisymétrique.

c) Si A et B sont semblables, ~~elles ont les mêmes valeurs propres.~~
 alors $\exists P$ inversible tel que $A = PBP^{-1}$.

$$\text{et } \underline{\text{tr}(A)} = \text{tr}(PBP^{-1}) = \text{tr}(B) \quad (\text{d'après 9-1})$$

5) a)

$$|\operatorname{tr}(A)| = \left| \sum_{i=1}^m a_{ii} \right| \quad \text{matrice triangulaire.}$$

$$\leq \sum_{i=1}^m |a_{ii}|$$

5) a) $|\operatorname{tr}(A)| = |\operatorname{tr}(B)|$

d'après 4. c car A est symétrique donc diagonalisable donc $A = PBP^{-1}$

$$= \left| \sum_{k=1}^m \lambda_k \right|$$

matrice triangulaire

$$\leq \sum_{k=1}^m |\lambda_k|$$

$$= \varepsilon(A)$$

Donc $|\operatorname{tr}(A)| \leq \varepsilon(A)$

b) $A^2 = PBP^{-1}PBP^{-1} = PB^2P^{-1}$

Donc A^2 est semblable à B^2

Donc $\operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}(B^2)$

$$= \sum_{k=1}^m |\lambda_k|^2 \quad \text{d'après q. 1.}$$

$$= \sum_{k=1}^m \lambda_k^2 \quad \text{car } |\lambda_k| \geq 0.$$

6) a) $A = 3I_3 - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

donc $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

donc $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$b) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc $\text{tr}(A) = 2 + 2 + 2 = 6$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = A^2$$

$\text{tr}(A^2) = 6 + 6 + 6 = 18$ Donc $\sum_{k=1}^3 \lambda_k^2 = 18$

De plus on a $\text{rg}(A - 3I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$= 1$ car 3 lignes non nulles égales

Donc $3 \in \text{Sp}(A)$

Or, $\text{rg}(A - 3I_3) = 1$ donc $\dim E_3(A) = 3 - 1 = 2$

De plus, $A^2 - 3A = 0$

Donc $X(X-3)$ est annihilateur de A .

$\text{Sp}(A) \subset \{0, 3\}$

Vérifions que 0 est valeur propre: $\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_2 \leftarrow l_2 + l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 + l_1 \end{matrix}$$

$$= 2 < 3$$

Donc $0 \in \text{Sp}(A)$

Donc $\text{Sp}(A) = \{0, 3\}$.

Donc il existe P inversible $\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $A = PBP^{-1}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Donc $B = P^{-1}AP$

Donc $E(A) = 6$ car $\text{tr}(A) = 6$ car $\text{tr}(A) = 6$ car $\text{tr}(A) = 6$

Copie anonyme - n°anonymat : 353513

Emplacement QR Code	Code épreuve : 287	Nombre de pages :	Session : 2024
	Épreuve de : Maths Appliquées II		
	Consignes - Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer - Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir - Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) - Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) - Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre		

Partie II -

7) a) ~~def prodEK (u, v, w, A) :~~
~~return mp.dot (~~
~~U = [~~
~~def prodEK (u, v, w, A) :~~
~~U = mp.array([[u, v], [v, w]])~~
~~return mp.dot (U, A)~~

b) $\text{prodEK}(1, -1, 2, \text{mp.array}([-2, 1], [1, -2]))$

8) a) $(U * A) Y =$ $\begin{pmatrix} uAx + vAbx \\ vAx + wAbx \end{pmatrix}$ (d'après l'exemple de $(U * A)X$)
 $= \begin{pmatrix} (ua + vb)AX \\ (va + wb)AX \end{pmatrix}$ ↓ car $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$
 $= \begin{pmatrix} \mu(ua + vb)X \\ \mu(va + wb)X \end{pmatrix}$ ↓ car $\mu X = AX$ (d'après l'énoncé)
 $= \mu \begin{pmatrix} (ua + vb)X \\ (va + wb)X \end{pmatrix}$

5/16

$$\begin{aligned}
 b) (U+A)Y &= \mu \begin{pmatrix} (ua+vb)X \\ (va+wb)X \end{pmatrix} \\
 &= \mu \begin{pmatrix} uaX + vbX \\ vaX + wbX \end{pmatrix} \\
 &= \mu \begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix} Y \\
 &= \mu UY
 \end{aligned}$$

Donc Y est un vecteur propre de (U+A) par la valeur propre $= \mu U$

$$9) a) * \text{card} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) = 2$$

Or, si elle est formée de vecteurs propres de U et de A, c'est que c'est non nul car un vecteur propre est non nul. De plus, la famille $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right)$

est libre car formée de vecteurs propres de U et de A.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a par

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0.$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \mu = U \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

donc $U=0$ et $A=0$. car $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \neq 0$
 donc $\lambda = \mu = 0$ et que U et A sont nulles.

Donc $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right)$ est libre et c'est une base de $\mathcal{L}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$$* \text{card} (X_1, \dots, X_n) = n$$

et $X_1, \dots, X_n$ sont des vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes
 donc les $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement non colinéaires et

$(X_1, \dots, X_n)$ est une base de $\mathcal{L}_{n,1}(\mathbb{R})$.

b)

Montrons que $\forall (a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_m, b_m) \in \mathbb{R}^{2m}$,

$$a_1 Y_1 + b_1 Z_1 + a_2 Y_2 + b_2 Z_2 + \dots + a_m Y_m + b_m Z_m = 0 \Rightarrow (a_1, \dots, b_m) = (0, \dots, 0)$$

$$a_1 Y_1 + b_1 Z_1 + \dots + a_m Y_m + b_m Z_m = 0$$

$$\Rightarrow a_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} X_1 + b_1 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} X_1 + \dots = 0$$

$$\Rightarrow a_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} X_1 + b_1 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} X_1 + \dots = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} X_1 (a_1 + a_2 + \dots + a_m) + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} X_1 (b_1 + \dots + b_m) = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0 \text{ et } b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$$

Donc $(Y_1, Z_1, \dots, Y_m, Z_m)$ est libre

c) $\text{card}(Y_1, Z_1, \dots, Y_m, Z_m) = 2m$

Donc c'est une base de $\mathcal{L}_m(\mathbb{R})$.

Donc il existe l'inversible tel que

$$(U \star A) = PDP^{-1}$$

d) $E(U \star A)$ = $\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^2 |Y_j \mu_k|$

$$= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^2 |\gamma_j| |\mu_k|$$

$$= \sum_{k=1}^m |\mu_k| \sum_{j=1}^2 |\gamma_j|$$

$$= \underline{E(U) \times E(A)}$$

10) a)

$$A_{2m} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc $\underline{U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$

b) $\varepsilon(A_{2m}) = \varepsilon(U \otimes A_m) \quad \downarrow \text{d'après d)}$
 $= \varepsilon(U) \times \varepsilon(A_m)$

Calculons $\varepsilon(U) = \underline{\det(U)} = -1 \neq 0$
~~Val. non nulle~~

Soit $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \in \text{sp}(U) \Rightarrow \det(U - \lambda I) = 0$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda(1-\lambda) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Donc } \varepsilon(U) = \sum_{k=1}^2 |\lambda_k| = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right|$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

On a donc bien $\underline{\varepsilon(A_{2m}) = \sqrt{5} \varepsilon(A_m)}$

Emplacement QR Code	Code épreuve : 287	Nombre de pages :	Session : 2024
	Épreuve de : Maths Appliqués II		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Partie III -

11) a) $\sum_{1 \leq i, j \leq m} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in I^2} a_{i,j} = 2m$ (Formule des poignées de main)

car $a_{i,j} = 0$ si les sommets ne sont pas reliés.

b) $p \geq 2$ donc $p-1 \geq 1$.

12) a) Si la matrice diagonale est nulle, c'est que 0 est l'unique valeur propre de A.
Or, il y a $m-p$ sommets isolés et m arêtes.

~~Je passe à l'étape suivante car A et cette matrice diagonale sont semblables.~~

~~Donc $\text{tr}(A) = \text{tr}(D)$.~~ ^{1 appelle D}

~~Or, il n'y a pas de boucle donc la diagonale de A = 0
donc $\text{tr}(A) = 0 = \text{tr}(D)$~~

b) ~~Noté au dessus par $\text{tr}(D) = 0$.~~

~~$\text{tr}(D^2) = \sum_{1 \leq i, j \leq m} a_{i,j}^2$~~

~~Comme $\text{tr}(A^2) = \sum_{k=1}^m \lambda_k^2$ (q. 5.b))~~

~~Alors $\text{tr}(D^2) = \sum_{1 \leq i, j \leq m} a_{i,j}^2 = \sum_{(i,j) \in I^2} a_{i,j}^2$ (d'après 11.a))~~

12) b) A et D sont semblables donc $\text{tr}(A) = \text{tr}(D)$ (q. 4.c))

Or, $\text{tr}(A) = 0$ car il n'y a pas de boucles dans le graphe d'après l'énoncé.
Donc $\text{tr}(D) = 0$

$$\text{tr}(A^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \quad (\text{q. 5.b))}$$

$$\text{donc } \text{tr}(D^2) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} d_{i,j}^2 = \quad \checkmark$$

13) a) Si k est isolé, alors la colonne sur A des k ne contient que des 0.

Comme il n'y a que des 0, $\mathbf{e}_k \in \text{Ker}(A)$.

$$k \text{ isolé} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & \overset{k}{\downarrow} 0 \\ & & 0 \\ & & \vdots \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Comme il y a $m-p$ sommets isolés, on a au minimum $\dim(\text{Ker}(A)) \geq m-p$.

Si $p < m$, il y a forcément des sommets isolés car il y a $m-p$ donc $m-p > 0$.

Donc tous les sommets de $p+1$ à n sont isolés

et $\mathbf{e}_{p+1} \in \text{Ker}(A)$, $\mathbf{e}_{p+2} \in \text{Ker}(A)$, ..., $\mathbf{e}_m \in \text{Ker}(A)$

$$\text{Donc } \lambda_{p+1} = \dots = \lambda_m = 0$$

b) $\sum_{k=1}^p \lambda_k^2 = \text{tr}(A^2)$ (d'après 9.5.b))
 car $\forall j \geq p+1, \lambda_j = 0$ (d'après 13.a))

Or, $\text{tr}(A^2) = \text{tr}(D^2)$ car A^2 et D^2 sont semblables:

$$A^2 = P D P^{-1} P D P^{-1} = P D^2 P^{-1}$$

Or, $\text{tr}(D^2) = \sum_{k=1}^m \lambda_k^2$ (12.b)

Donc $\sum_{k=1}^p \lambda_k^2 = \sum_{k=1}^m \lambda_k^2$

c) On sait que $\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy$

Donc $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

On peut poser $x = x_i$ et $y = y_i$, et on généralise la formule

Donc on a bien $\sum_{1 \leq i, j \leq r} (x_i^2 + y_j^2) \geq \sum_{1 \leq i, j \leq r} 2x_i y_j$

d) on pose $x_j = 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, r\}$

Donc on a $\sum_{i=1}^r 2x_i \leq \sum_{i=1}^r (x_i^2 + 1)$

donc $\sum_{i=1}^r 2x_i \geq \sum_{i=1}^r x_i^2 + r$

1
 suite: $\theta = \max_{1 \leq k \leq m} \lambda_k$

Or, $\sum_{k=1}^p \lambda_k^2 = \sum_{k=1}^m \lambda_k^2$ donc $\sum_{k=1}^p \lambda_k \geq \sum_{k=1}^m \lambda_k \geq \max_{1 \leq k \leq m} \lambda_k = \theta > 0$

14) a) ~~$Q^{-1} = Y^{-1} = {}^t(QX)^{-1} = X^{-1} Q^{-1}$~~

car $\dim_{\mathbb{K}}(A) \leq m$.

~~${}^tY = {}^t(QX) = {}^tX {}^tQ = {}^tX {}^t(P) = {}^tXP$~~
 $* {}^tQ = {}^t({}^tP) = P$

Et, $Q^{-1} = ({}^tP)^{-1} = (P^{-1})^{-1} = P$ donc ${}^tQ = Q^{-1}$

$$* A = PDP^{-1} = {}^t Q D Q \quad \text{car } Q = {}^t P \text{ donc } {}^t Q = {}^t({}^t P) = P \text{ et } P^{-1} = {}^t P = Q.$$

$$* \underline{{}^t Y Y} = {}^t (Q X) Q X = {}^t X {}^t Q Q X = {}^t X Q^{-1} Q X = \underline{{}^t X X}$$

$$b) \underline{{}^t X A X} = {}^t X {}^t Q D Q X = {}^t (Q X) D Y = \underline{{}^t Y D Y}$$
~~$$= {}^t X P D P^{-1} X$$~~

$$c) \underline{{}^t X A X} = \sum_{k=1}^n$$

15) ~~${}^t(U)$ est une matrice ligne qui vaut 1 si i est isolé et 0 sinon. vérifie les lignes et ${}^t U$ les colonnes non nulles (la matrice compte les sommets isolés car matrice ligne et colonne).
Donc ${}^t U A U$ compte le nombre d'arêtes du graphe.~~

Donc

15) a) ${}^t(U)$ est une matrice ligne qui vaut 1 si i est isolé, 0 sinon.

Donc ${}^t U A U$ compte le nombre d'arêtes du graphe car U est une matrice colonne.

$$\text{Donc } {}^t U A U = \sum_{(i,j) \in \mathbb{I}^2} a_{ij} = \text{sum (11. a)}$$

$$\frac{\text{sum}}{P} = \frac{\sum_{(i,j) \in \mathbb{I}^2} a_{ij}}{P}$$

sans suite

Copie anonyme - n°anonymat : 353513

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths Appliquées II.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

b) $\sqrt{p} \leq p$

donc $\frac{1}{\sqrt{p}} \geq 1$

$0 \leq \sqrt{2m}$ (d'après 13.b) donc $\frac{0}{\sqrt{2m}} \leq 1$.

pas suite

16) 2) F est C^1 sur $[0,1]$ par opérations sur les fonctions nulles et, $\forall x \in [0,1]$,

$$F'(x) = 1 + \frac{p - 2px + 2x}{2\sqrt{(p-1)(1-x^2)}}$$

$$= 1 + \frac{2x(1-p) + p}{2\sqrt{(p-1)(1-x^2)}}$$

Or, $\forall x \in [0,1]$ donc $1-p \leq 0$

$2x(1-p) + p \geq 0$

$\Rightarrow 2x(1-p) \geq -p$ et $1-p \neq 0$

$\Rightarrow x \geq \frac{-p}{2(1-p)}$ et $1-p < 0$

Comme $x \mapsto x$ est croissante sur $[0,1]$

et $x \mapsto \sqrt{(p-1)(1-x^2)}$ est croissante sur $\left[\frac{-p}{2(1-p)}, 1\right]$

17) a)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \dots & \alpha_{m,m} \end{pmatrix}$$

m

$p = m$ donc il y a ~~un~~ sommet isolé, aucune ligne ni colonne vide

b)

17) a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ 1 & & \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

m lignes.

$m = p$ donc ~~un~~ sommet isolé.

$$b) \operatorname{rg}(A + I) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 1 & & \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Donc -1 est valeur propre et $\dim(E_{-1}(A)) = m-1$

c)

$$\operatorname{rg}(A - (m-1)I) = \operatorname{rg}(A + I - mI)$$

$$= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} (-m) & \dots & (-m) \\ \vdots & & \vdots \\ (-m) & \dots & (-m) \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rg}$$

$$\text{Or, } \text{rg}(A + I - mI) = \text{rg} \begin{pmatrix} (-m) & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & (-m) \end{pmatrix}$$

$$= m-1 < m$$

Donc $m-1 \in \text{sp}(A)$

~~$E(A) = \dots$~~

Donc A est semblable à D , $D = \left. \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & (0) & \\ & & & \ddots \\ (0) & & & & -1 \end{pmatrix} \right\} \begin{matrix} m-1 \\ \text{fois} \end{matrix}$

Donc $E(A) = \sum_{k=1}^m |\lambda_k|$ $\xrightarrow{\text{d'apr } q.1)} = \sum_{k=1}^{m-1} 1 + m-1$

$$= (m-1) + (m-1) = \underline{2(m-1)}$$

18) a) — on admet que $\forall j \in \{1, p\}, |\lambda_j|(\alpha + \beta) \geq \lambda_j^2 + \alpha\beta$

b) Donc on fait la somme de $j=1$ à p .

on a $\sum_{j=1}^p |\lambda_j|(\alpha + \beta) \geq \sum_{j=1}^p \lambda_j^2 + \sum_{j=1}^p \alpha\beta$

Or, $\sum_{j=1}^p |\lambda_j|(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta) \sum_{j=1}^p |\lambda_j| = (\alpha + \beta) E(A)$

et $\sum_{j=1}^p \lambda_j^2 = \text{tr}(A^2)$ (d'apr q. 5.6))

et $\sum_{j=1}^p \alpha\beta = p\alpha\beta$

Donc $\sum_{j=1}^p |\lambda_j|(\alpha + \beta) \geq \sum_{j=1}^p (\lambda_j^2 + \alpha\beta)$

$$\Rightarrow \underline{(\alpha + \beta) E(A) \geq \text{tr}(A^2) + p\alpha\beta}$$

c) Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ / $a \leq b^2$.

$b+t > 0$ donc φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ par opérations sur les fractions réelles

$$\text{et } \varphi'(t) = \frac{t(b+t) - (a+bt)}{(b+t)^2} = \frac{t^2 - a}{(b+t)^2} = \frac{(t+\sqrt{a})(t-\sqrt{a})}{(b+t)^2}$$

~~$a, a \leq b^2$
donc $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$
 $\sqrt{a} \leq b$~~

$$\varphi'(t) \geq 0 \Leftrightarrow (t+\sqrt{a})(t-\sqrt{a}) \geq 0$$

t	$0 - \sqrt{a}$	$\sqrt{a}$
$\varphi'(t)$	$-$	$+$
φ	$\varphi(-\sqrt{a})$	$\varphi(\sqrt{a})$

$\frac{a}{b}$

~~$$\varphi(-\sqrt{a}) = \frac{a + b(-\sqrt{a})}{b + (-\sqrt{a})}$$~~

$$\varphi(0) = \frac{a}{b}$$

~~$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 1$~~

$b+t \sim t$
 $a+bt \sim bt$
 $\frac{bt}{t} = b$